РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

УК №

Москва 2022

Алексеев М.В.
Решение задач по физике: учебно-методическое пособие. - М., 2022. 192 с.

Учебно-методическое пособие «Решение задач по физике» содержит примеры решения задач по всем разделам физики в рамках школьной программы, а также включает в себя теоретические и практические материалы, необходимые для успешной сдачи вступительного экзамена в ИКСИ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие создавалось авторами в течении многих лет работы в предметной комиссии и подготовки абитуриентов. В основу положены задачи вступительных экзаменов в различные вузы, существенно переработанные и систематизированные авторами. Особенностью данного пособия является разбор задач по всем темам, изучаемым в курсе физики соответствующих по уровню предлагаемым на приемных экзаменах в ИКСИ.

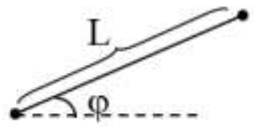
Пособие разбито на 6 частей, соответствующих делению курса физики на основные разделы. Каждая часть начинается с разбора нескольких задач по данной теме. Эти задачи подобраны так, чтобы на их примере можно было продемонстрировать как основные методы и подходы к решению задач, так и обсудить различные тонкости, ловушки и типичные ошибки, допускаемые абитуриентами.

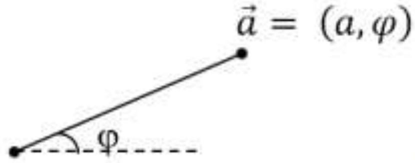
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

1.1. ВЕКТОР

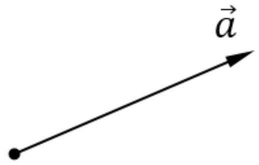
Вектор – это направленный отрезок, поэтому на плоскости характеризуется двумя числами: величиной (a) и углом (φ), который он составляет с некоторым наперед заданным направлением.

Таким образом, чтобы задать вектор мы должны задать два числа (a, φ)





величина вектора обозначается как $a \equiv |\vec{a}|$

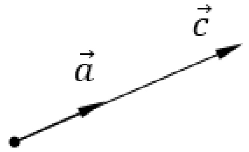


1.1.1. Умножение вектора на число

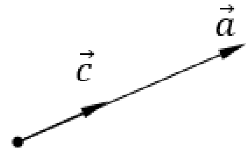
Результатом умножения вектора $\vec{a}$ на число b является вектор $\vec{c}$, сонаправленный с исходным, если число b положительно и противонаправленный исходному, если число b отрицательно, величина результирующего вектора равна равна произведению числа b на величину вектора a.

$\vec{c} = b \cdot \vec{a}, c = b \cdot a$

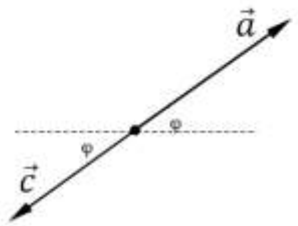
b > 0, b > 1



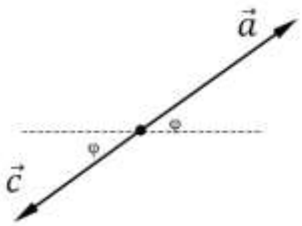
b > 0, b < 1



b < 0, |b| > 1



b < 0, |b| < 1



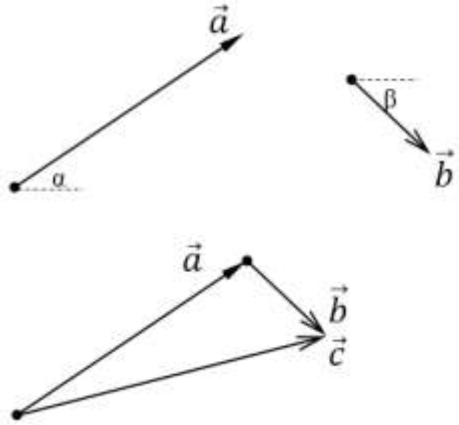
1.1.2. Сложение векторов

Осуществляется по двум правилам:

1) Правило треугольника.

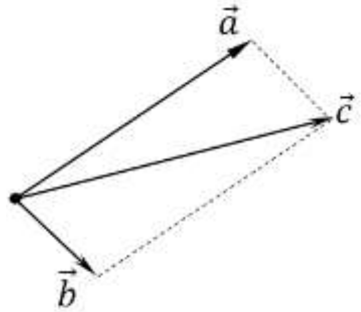
Начало второго вектора параллельным переносом соединяем с концом первого вектора и проводим вектор, соединяющий начало первого с концом второго.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (a, \alpha), \vec{b} = (b, \beta)$



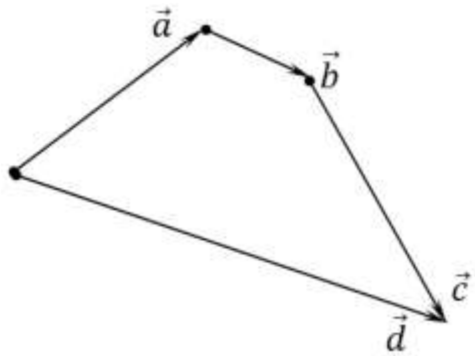
2) Правило параллелограмма.

Параллельным переносом соединяем начала обоих векторов и достраиваем получившуюся фигуру до параллелограмма. Проводим диагональ параллелограмма с началом, совпадающим с началами исходных векторов.



Следует отметить, что правило треугольника предпочтительнее применять когда складывается более двух векторов.

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



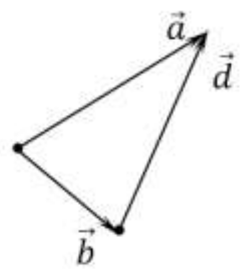
1.1.3. Вычитание векторов

Можно проводить двумя способами:

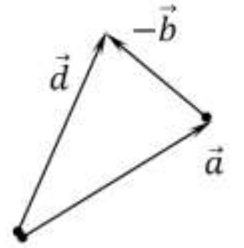
1) Параллельным переносом соединяем начала обоих векторов, далее рисуем вектор, начало которого совпадает с концом вектора, который вычитается, а конец совпадает с концом вектора, из которого вычитаем;

2) Применяем правило сложения первого вектора $\vec{a}$ с вектором $\left(-\vec{b}\right)$.

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



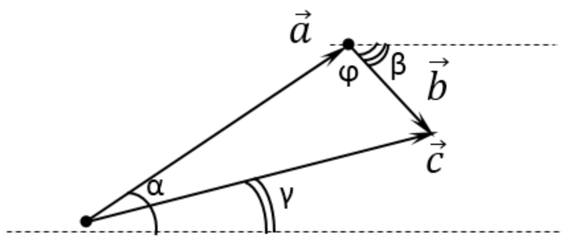
$\vec{d} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$



Так как вектор на плоскости характеризуется двумя числами, то необходимо их найти и совершенно недостаточно нарисовать. Поэтому разберем следующий простейший пример:

Найти вектор $\vec{c}$, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что величины и направления этих векторов известны и равны соответственно a, α и b, β.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$$\varphi = \pi - \alpha - \beta$$

Для получившегося по построению треугольника применим теоремы косинусов и синусов.

Теорема cos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\pi - \alpha - \beta);$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta);$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta)}.$$

Теорема sin:

$$\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{b} = \frac{\sin(\pi - \alpha - \beta)}{c};$$
$$\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{b} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{c};$$
$$\frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{b} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{c};$$

$\sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) - \sqrt{1 - cos^2(\gamma)} \cdot \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \cdot \sin(\alpha + \beta)$;

$\left(\sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) - \frac{b}{c} \cdot \sin(\alpha + \beta)\right) = \sqrt{1 - cos^2(\gamma)} \cdot \cos(\alpha)$;

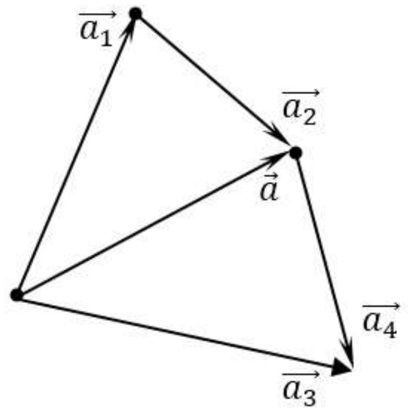
$sin^2(\alpha) \cdot cos^2(\gamma) + \frac{b^2}{c^2} \cdot sin^2(\alpha + \beta) - 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha + \beta) =$
$= \left(1 - cos^2(\gamma)\right) \cdot \cos^2(\alpha)$;

$$\cos(\gamma) = \frac{b}{c} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha + \beta) \pm \sqrt{\frac{b^2}{c^2} \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha + \beta) - \left(\frac{b^2}{c^2} \cdot \sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2(\alpha)\right)}.$$

Как видим результат решения простейшей задачи оказался более чем непростым.

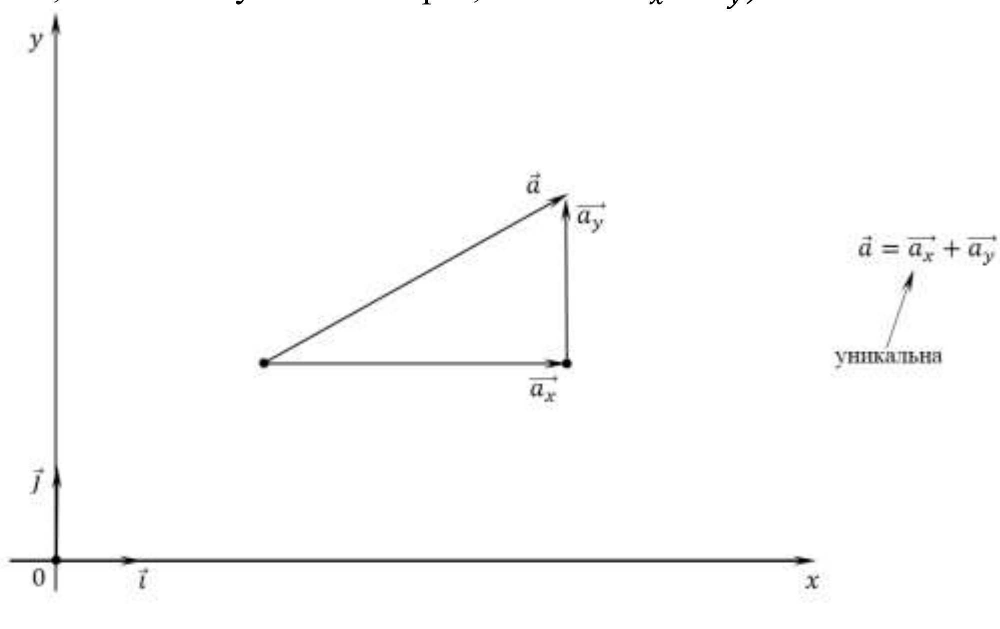
Подумаем, как можно упростить нашу задачу.

Порассуждаем. Любой вектор можно представить как сумму двух других, но таких сумм будет бесконечно большое количество, ровно столько, сколько можно нарисовать треугольников со стороной, совпадающей с вектором.



$$\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} = \cdots$$

Теперь нарисуем декартовые оси и поставим условие, что вектора, которые в сумме дают наш вектор параллельны соответствующим осям, в этом случае мы видим, что данная сумма уникальна (для определенности вектора, которые мы складываем, чтобы получить вектор $\vec{a}$, назовем $\overrightarrow{a_x}$ и $\overrightarrow{a_y}$).



Вспомним, что называется ортами осей,

Орты осей OX: $\vec{i}$; OY: $\vec{j}$

Основные свойства орта:

$\vec{i} \uparrow\uparrow OX$; $|\vec{i}| = 1$; безразмерен.

Используя орты осей мы можем представить наши вектора $\overrightarrow{a_x}$ и $\overrightarrow{a_y}$ как:

$\overrightarrow{a_x} = a_x \cdot \vec{i}$

$\overrightarrow{a_y} = a_y \cdot \vec{j}$

И тогда вектор $\vec{a}$ можно задать следующим образом, то есть с помощью пары чисел a_x и a_y

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$

1) Вектора $\overrightarrow{a_x}$ и $\overrightarrow{a_y}$ называются составляющими вектора $\vec{a}$ вдоль координатных осей.

2) Числа a_x и a_y называются проекциями вектора $\vec{a}$ на координатной оси.

3) Проекция $\vec{a}$ на ось X (a_x) – это число по модулю равное длине составляющей вектора $\vec{a}$ вдоль оси X, a_x и по знаку >0, если составляющая сонаправлена с осью, и <0, если составляющая противонаправлена оси.

Из всего вышесказанного вытекает II Способ задать вектор:

С помощью двух проекций.

$\vec{a} = (a_x, a_y)$

Этот способ конечно менее наглядный, чем собственно векторный (через величину и направление) но при этом обладает неоспоримыми преимуществами, которые мы рассмотрим на следующем примере. Решим ту же самую задачу, с тем отличием, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы через проекции соответственно a_x, a_y и b_x, b_y.

Пример 1.1.

Найти $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Дано:	Решение:
$\vec{a} = (a_x, a_y)$ $\vec{b} = (b_x, b_y)$	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}\right) + \left(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}\right) =$ $= (a_x + b_x) \cdot \vec{i} + (a_y + b_y) \cdot \vec{j}$
$c_x - ?$ $c_y - ?$ $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j}$.	Обратим внимание, что мы даже не нарисовали рисунок. Вектор $\vec{c}$ можно представить как:

Таким образом, очевидно, что проекции вектора $\vec{c}$ находятся сразу, вместо векторного уравнения мы записываем 2 скалярных, заменяя вектора на их проекции соответственно:

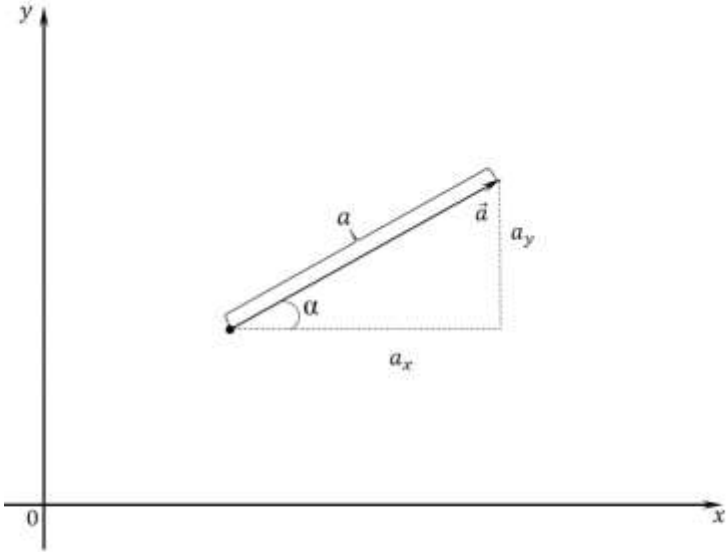
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

Отсюда возникает следующая последовательность решения задачи:

В условии все векторные величины будут заданы в векторной форме, т.е. через величину и направление, мы должны уметь рассчитать проекции этих векторов, решить векторные уравнения и результат обратно преобразовать в векторную форму.

Перевод векторной формы в проекционную и наоборот.



Даны величина и направление вектора: a, α.

Находим проекции вектора:

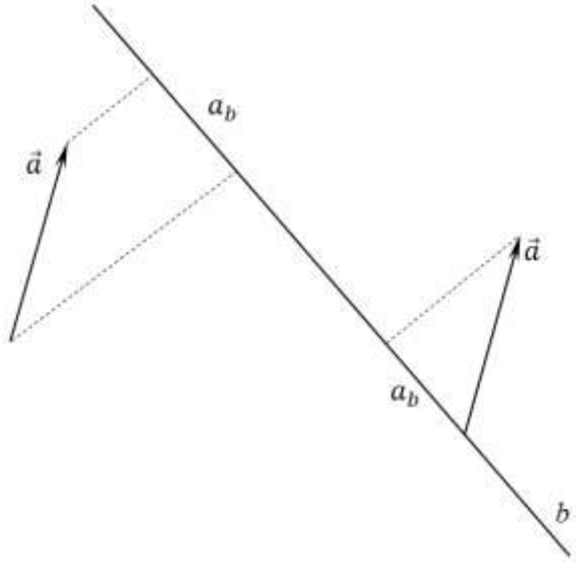
$$\begin{cases} a_x = a \cdot \cos(\alpha) \\ a_y = a \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Даны проекции вектора: a_x, a_y.

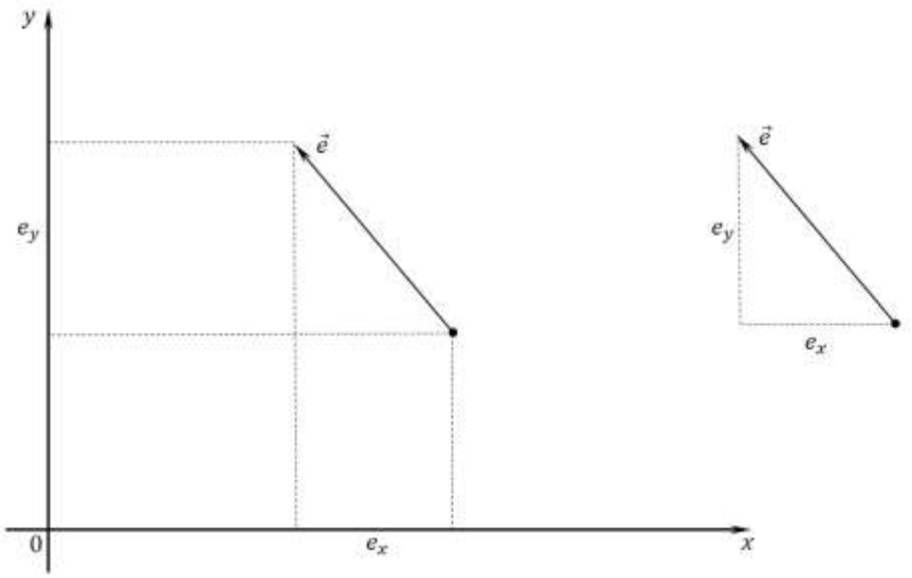
Находим величину и направление:

$$\begin{cases} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ tg(\alpha) = {}^{a_y}/_{a_x} \end{cases}$$

1.1.4. Проекция вектора на прямую



1.1.5. Проекция вектора на координатные оси



Пример 1.2.

Решим следующую задачу.

Дано:

$\vec{d} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{a} = (a, \alpha)$

$\vec{b} = (b, \beta)$

$\vec{c} = (c, \gamma)$

d - ?

φ - ?

Сначала найдем проекции заданных векторов

1). $a_x = a \cdot \cos(\alpha)$;

$a_y = a \cdot \sin(\alpha)$;

2). $b_x = b \cdot \cos(\beta)$;

$b_y = b \cdot \sin(\beta)$;

3). $c_x = c \cdot \cos(\gamma)$;

$c_y = c \cdot \sin(\gamma)$;

Затем найдём проекции искомого вектора

$d_x = 3 \cdot a \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot b \cdot \cos(\beta) - c \cdot \cos(\gamma)$;

$d_y = 3 \cdot a \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot b \cdot \sin(\beta) - c \cdot \sin(\gamma)$;

И наконец найдем величину и направление искомого вектора

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} =$$

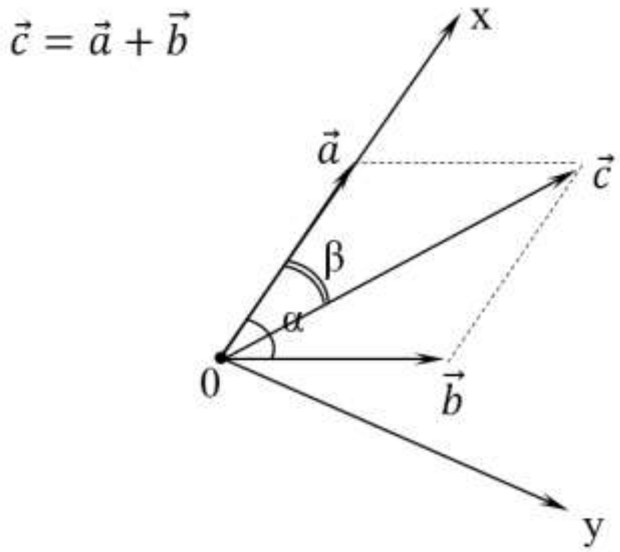
$$= \sqrt{(3a\cos(\alpha) + 2b\cos(\beta) - c\cos(\gamma))^2 + (3a\sin(\alpha) + 2b\sin(\beta) - c\sin(\gamma))^2};$$

$$tg(\varphi) = \frac{d_y}{d_x} = \frac{3 \cdot a \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot b \cdot \sin(\beta) - c \cdot \sin(\gamma)}{3 \cdot a \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot b \cdot \cos(\beta) - c \cdot \cos(\gamma)}.$$

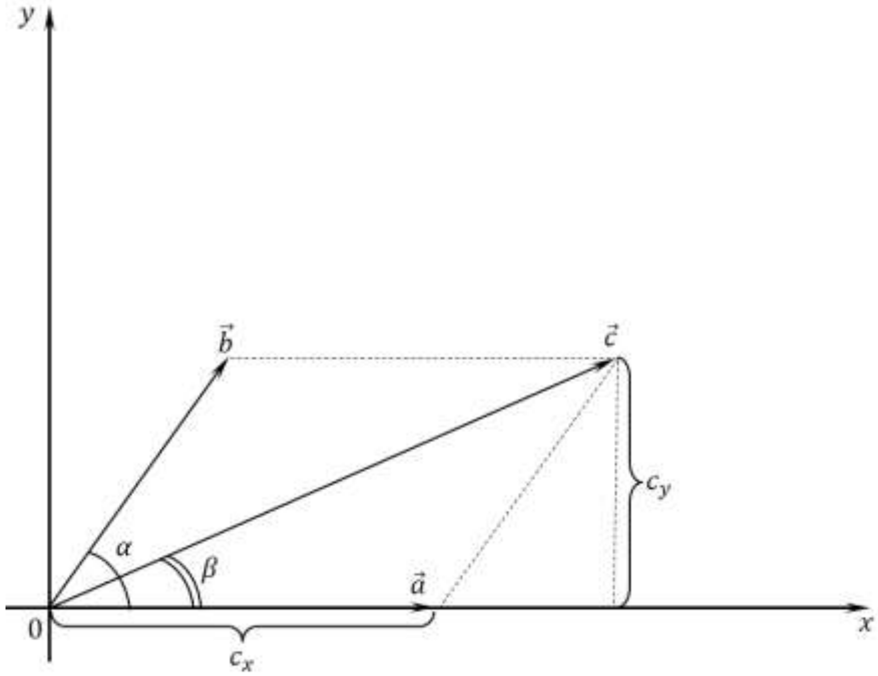
Пример 1.3.

Угол между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60º. Определить модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и угол β между $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Модули векторов a=3,0, b=2,0.

Решение:



Начнем решение задачи с выбора осей, заметим, что углы известный и искомый откладываются от вектора $\vec{a}$, следовательно направим ось X вдоль вектора $\vec{a}$. Рисунок получился неудобным, перерисуем его.



$a_x = a;$ $\quad a_y = 0;$

$b_x = b \cdot \cos(\alpha)\,;$ $\quad b_y = b \cdot \sin(\alpha)\,;$

$c_x = a + b \cdot \cos(\alpha)\,;$ $\quad c_y = b \cdot \sin(\alpha)\,;$

$$c = \sqrt{(a + b \cdot \cos(\alpha))^2 + (b \cdot \sin(\alpha))^2} = \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + b^2 \cdot sin^2(\alpha)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)};$$

$$tg(\beta) = \frac{c_y}{c_x} = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a + b \cdot \cos(\alpha)}.$$

2. МЕХАНИКА

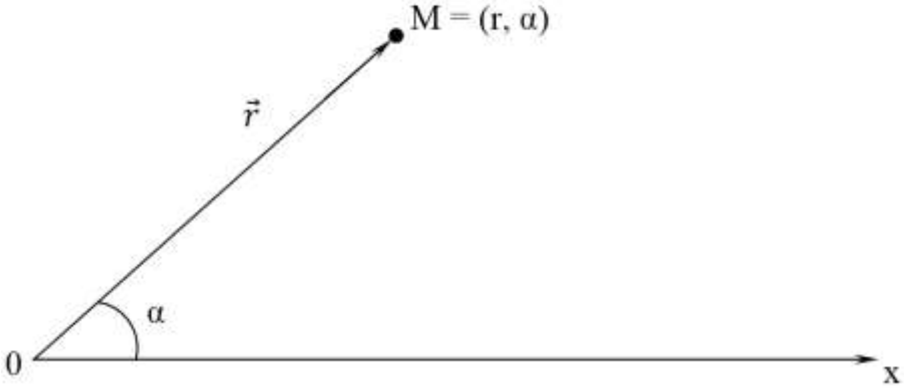
2.1. КИНЕМАТИКА

Основная задача кинематики – определить положение тела в любой момент времени, не рассматривая причины возникновения его движения.

2.1.1. Способы определить положение тела (на плоскости)

I способ – векторный.

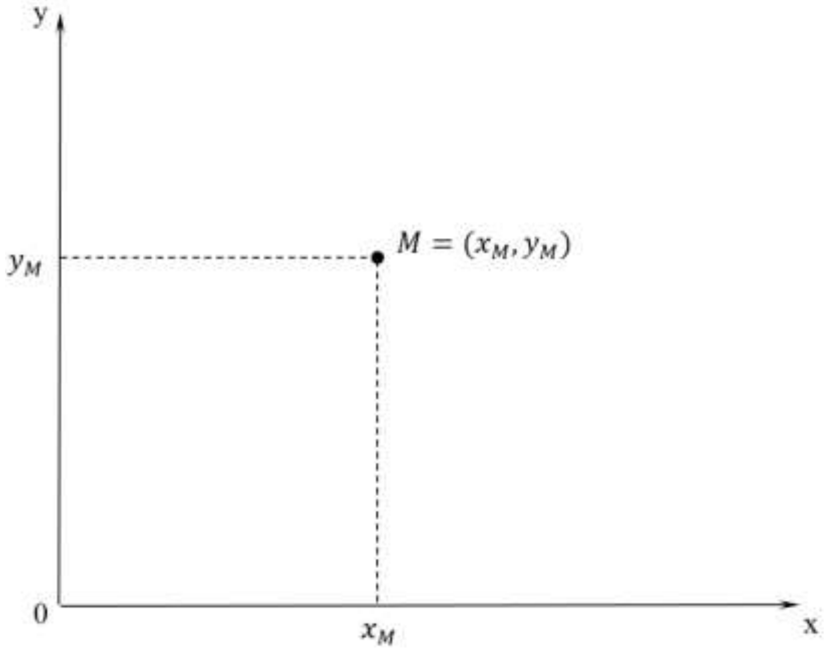
Выбираем начало отсчета (некую очевидную точку в пространстве), выбираем некое очевидное направление и откладываем вектор $\vec{r}$



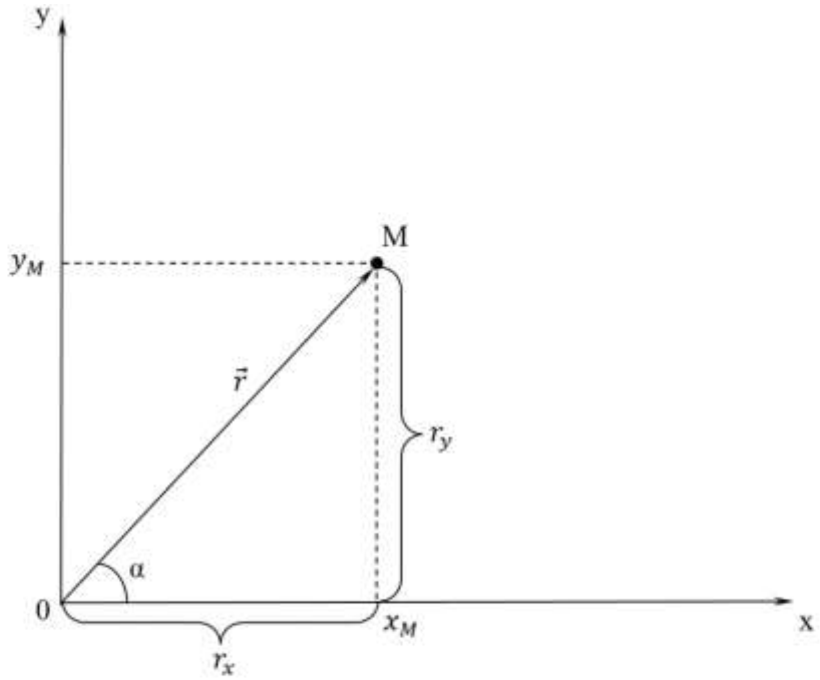
Данный вектор $\vec{r}$ называется радиус-вектор.

Радиус-вектор всегда начинается в начале отсчета и заканчивается в той точке, на которую указывает.

II способ – координатный.



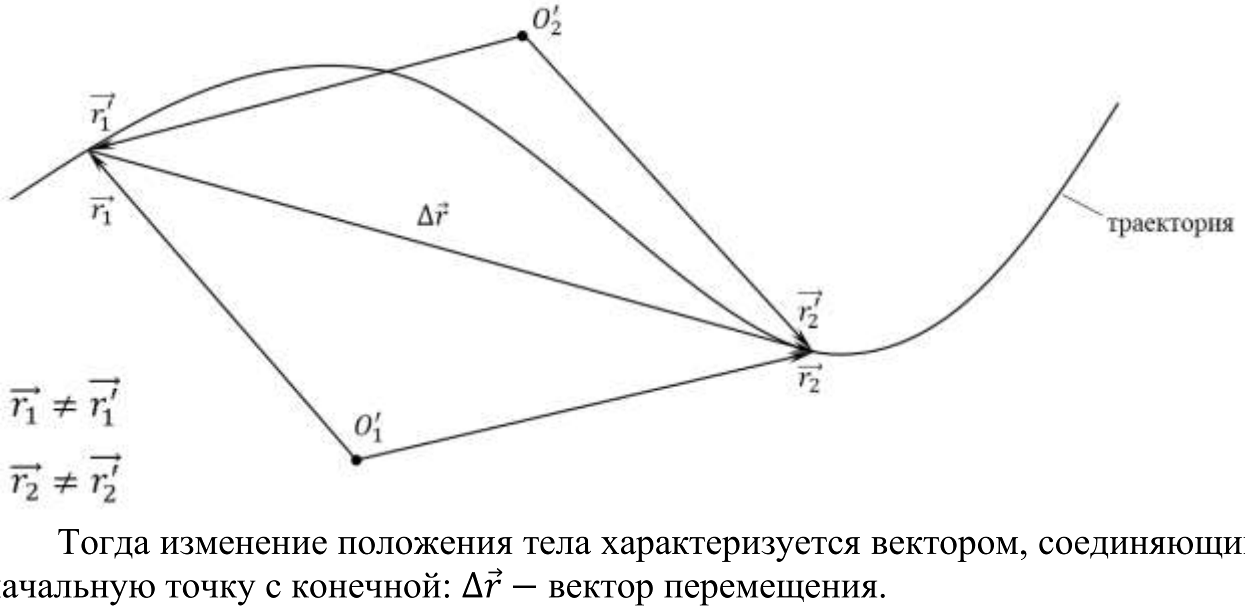
Между векторным и координатными способами существует очевидная связь:



Получается, что координаты точки являются проекциями радиус-вектора $r_x \equiv x_M, r_y \equiv y_M$.

2.1.2. Определить изменение положения тела

Пусть есть тело, которое движется, описывая в пространстве некоторую кривую линию, которая называется траекторией. Возьмем две точки на этой траектории и определим их положение относительно двух разных наблюдателей:



Тогда изменение положения тела характеризуется вектором, соединяющим начальную точку с конечной: $\Delta\vec{r}$ − вектор перемещения.

Заметим, что вне зависимости от выбора начала отсчета, выполняется равенство:

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2'} - \overrightarrow{r_1'}$$

Таким образом в любой системе отсчета:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{\text{кон}} - \vec{r}_{\text{нач}}$$

2.1.3. <u>Закон равномерного прямолинейного движения</u>

За <u>любые</u> равные интервалы времени тело совершает одинаковые перемещения.

$\Delta\overrightarrow{r_1} = \Delta\overrightarrow{r_2} = \cdots = \Delta\overrightarrow{r_N}$
$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \cdots = \Delta t_N$
$$\frac{\Delta\overrightarrow{r_1}}{\Delta t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{r_2}}{\Delta t_2} = \cdots = \frac{\Delta\overrightarrow{r_N}}{\Delta t_N} = \overrightarrow{const}$$
(не зависит от выбора интервала времени).

Таким образом мы получили физическую величину, характеризующую равномерное прямолинейное движение:

$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ – скорость при равномерном прямолинейном движении.

Раскроем:
$$\vec{V} = \frac{\vec{r}_{\text{кон}} - \vec{r}_{\text{нач}}}{(t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}})}$$
$$\vec{r}_{\text{кон}} = \vec{r}_{\text{нач}} + \vec{V} \cdot (t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}})$$

Получили закон равномерного прямолинейного движения – мы можем определить положение тела в любой момент времени t:
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{\text{нач}} + \vec{V} \cdot (t - t_{\text{нач}})$$

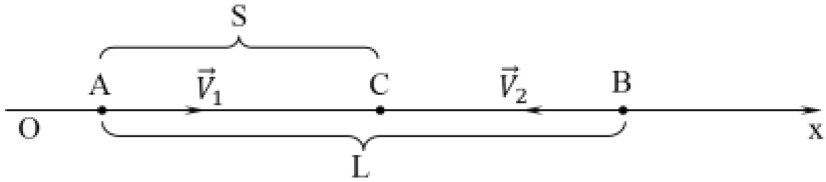
Если $t_{\text{нач}} = 0$ $(\vec{r}_{\text{нач}} \equiv \vec{r}_0)$ Тогда получим упрощенную форму закона, при условии, что секундомер включен в момент начала движения тела.
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} \cdot t.$$

На следующем примере попробуем по пунктам сформулировать методику решения любых физических задач, не только в кинематике.

Пример 2.1.

Из пункта А в пункт В выехал автомобиль с постоянной скоростью v_1. Одновременно навстречу ему из пункта В выехал автомобиль с постоянной скоростью v_2. Расстояние между А и В равно l. Найти расстояние S от А до точки встречи.

Решение:



2) Физические законы:
$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{V}_1 \cdot t \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{V}_2 \cdot t \end{cases};$$

3). Выбор осей (начало отсчета, направления) (так как законы векторные, для решения векторных уравнений нужно перейти к проекционной форме).

4). Проецирование:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + V_1 \cdot t \\ x_2 = L + (-V_2) \cdot t \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = V_1 \cdot t \\ x_2 = L - V_2 \cdot t \end{cases};$$

Заметим мы получили законы движения наших тел в скалярной форме, удобной для начала решения. Здесь x_1 и x_2 – координаты первого и второго тела в любой момент времени.

5) Решаем задачу (конкретизируем – собственно решаем задачу):

На траектории как первого, так и второго тела есть только одна точка, которая нас может заинтересовать – это точка встречи С. Координата точки С - S, и первое и второе тело окажутся в ней одновременно в некоторый неизвестный но абсолютно конкретный момент времени t_c.

$$\begin{cases} S = V_1 \cdot t_c \\ S = L - V_2 \cdot t_c \end{cases};$$

Мы получили систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

6) Алгебра (просто решаем полученную систему):

$$\begin{cases} t_c = \dfrac{S}{V_1} \\ S = L - V_2 \cdot \dfrac{S}{V_1} \end{cases};$$

$$t_c = \frac{1 \cdot V_1}{V_1 + V_2} \cdot \frac{1}{V_1};$$

$$t_c = \frac{1}{V_1 + V_2};$$

$$S + \frac{V_2}{V_1} \cdot S = L;$$

$$S \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) = L;$$

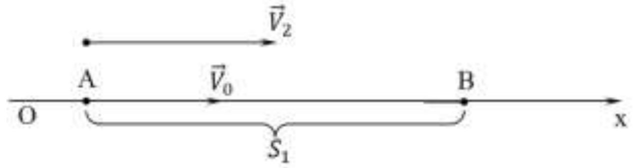
$$S \cdot \frac{V_1 + V_2}{V_1} = L;$$

$$S = \frac{L \cdot V_1}{V_1 + V_2}.$$

Пример 2.2.

Из пункта А выехал автомобиль с постоянной скоростью v_0. Через промежуток времени, равный t, из того же пункта в том же направлении выходит другой автомобиль и нагоняет первый в пункте В, находящемся от А на расстоянии s_1. Найти скорость второго автомобиля.

Решение:



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{V}_0 \cdot t \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{01} + \vec{V}_2 \cdot (t - T) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + V_0 \cdot t \\ x_2 = 0 + V_2 \cdot (t - T) \end{cases};$$

$$\begin{cases} S_1 = V_0 \cdot t_B \\ S_1 = V_2 \cdot (t_B - T) \end{cases};$$

$$\begin{cases} t_B = {S_1}/{V_0} \\ S_1 = V_2 \cdot ({S_1}/{V_0} - T) \end{cases};$$

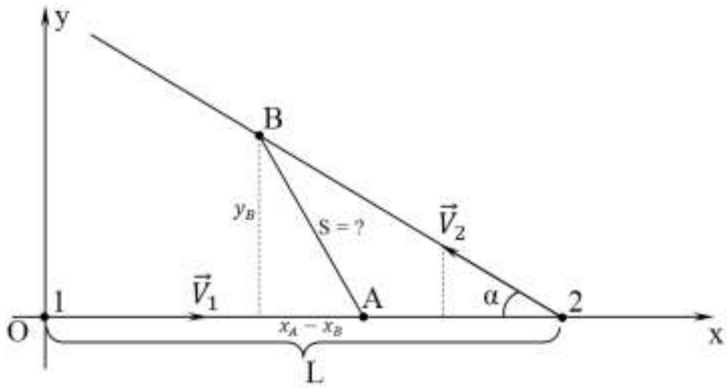
$$S_1 = V_2 \cdot \left(\frac{S_1 - T \cdot V_0}{V_0}\right);$$

$$V_2 = \frac{S_1 \cdot V_0}{S_1 - T \cdot V_0}.$$

Пример 2.3.

Корабль 1 двигается по направлению к точке где в данный момент находится 2-ой корабль со скоростью V1; второй корабль плывет со скоростью V2 по направлению, составляющему острый угол α к отрезку, соединяющему корабли в начальный момент времени. Расстояние между кораблями в начале равно L. Найти зависимость расстояния между кораблями от времени S(t).

Решение:



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{V}_1 \cdot t \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{V}_2 \cdot t \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 + V_1 \cdot t \\ y_1 = 0 + 0 \end{cases};$$

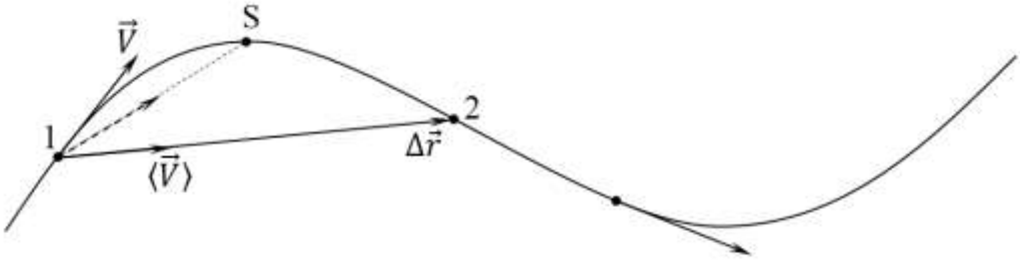
$$\begin{cases} x_2 = L + (-V_2 \cdot \cos(\alpha)) \cdot t \\ y_2 = 0 + V_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{cases};$$

$$\begin{cases} S = \sqrt{y_B^2 + (x_A - x_B)^2} \\ x_A = V_1 \cdot T \\ x_B = L - V_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot T \\ y_B = 0 + V_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot tv \end{cases};$$

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

$$S = \sqrt{V_2^2 \cdot sin^2(\alpha) \cdot T^2 + (V_1 \cdot T - L + V_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot T)^2}.$$

2.1.4. Скорость при криволинейном движении



1). Средняя скорость (перемещения):

Это векторная физическая величина (ФВ) равная отношению вектора перемещения к интервалу времени, в течение которого это перемещение совершено

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{\Delta t} > 0 => \langle\vec{V}\rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$$

2). Средняя путевая скорость:

Это скалярная физическая величина (СФВ) равная отношению пути к интервалу времени, в течение которого этот путь пройден

$$V_{\text{ср}n} = \frac{S}{\Delta t}$$

$$|\langle\vec{V}\rangle| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

$$V_{\text{ср}n} \geq |\langle\vec{V}\rangle|$$

3). (Мгновенная) скорость:

Это векторная физическая величина (ВФВ) равная пределу при $\Delta t \to 0$ отношению вектора перемещения к интервалу времени, в течение которого это перемещение совершено.

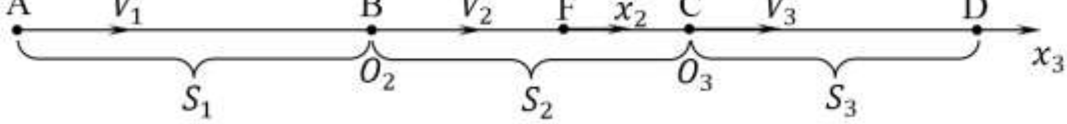
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Пример 2.4.

Всадник проехал за первые 40 мин 5 км. Следующий час он двигался со скоростью 10км/ч, а оставшиеся 6 км пути - со скоростью 12км/ч. Определите среднюю скорость всадника за все время движения, за первый час движения.

Решение:



Пишем физический закон – определение средней путевой скорости на всем пути

$$V_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3};$$

Движение на участке BC удовлетворяет закону равномерного прямолинейного движения:

$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{V}_2 \cdot t;$

$x_2 = 0 + V_2 \cdot t;$

$S_2 = V_2 \cdot t_2;$

CD:

$\vec{r}_3 = \vec{r}_{03} + \vec{V}_3 \cdot t;$

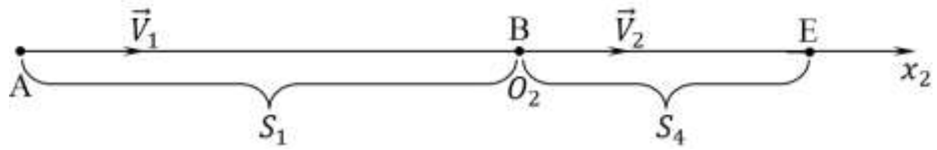
$x_3 = V_3 \cdot t;$

$S_3 = V_3 \cdot t_3;$

$V_{\text{ср}} = \dfrac{S_1 + V_2 \cdot t_2 + S_3}{t_1 + t_2 + S_3/V_3};$

К моменту времени, равному T = 1 час движения тело окажется на участке BC.

$V_{\text{ср}1} - ?$



$V_{\text{ср}1} = \dfrac{S_1 + S_4}{T};$

BE:

$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} + \vec{V}_2 \cdot t;$

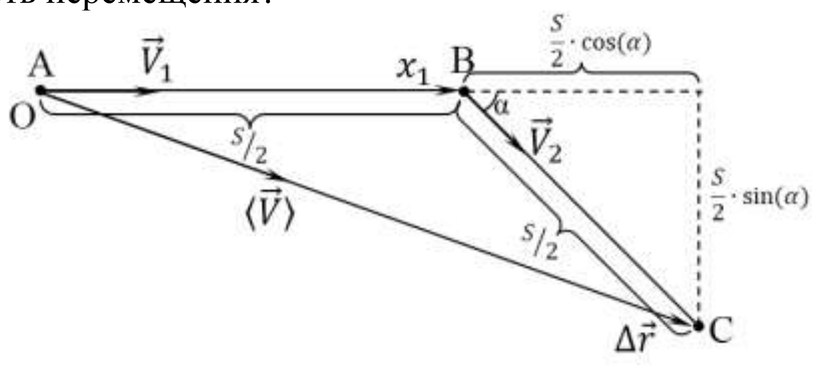
$x_2 = 0 + V_2 \cdot t;$

$S_4 = V_2 \cdot (T - t_1);$

$$V_{\text{ср}1} = \frac{S_1 + V_2 \cdot (T - t_1)}{T}.$$

Пример 2.5.

Первую половину пути машина шла со скоростью 40км/час. Затем она стала двигаться под углом 30^0 к своему начальному направлению движения со скоростью 60км/час. Чему равна средняя путевая скорость автомашины и средняя скорость перемещения?



$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{V}_1 \cdot t;$

$x_1 = 0 + V_1 \cdot t;$

$\frac{S}{2} = V_1 \cdot t_1;$

$\frac{S}{2} = V_2 \cdot t_2;$

$V_{\text{ср}n} = \frac{S}{t_1 + t_2};$

$V_{\text{ср}n} = \frac{S}{\frac{S}{2 \cdot V_1} + \frac{S}{2 \cdot V_2}} = \frac{1}{\frac{V_2}{2 \cdot V_1 \cdot V_2} + \frac{V_1}{2 \cdot V_1 \cdot V_2}} = \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2};$

$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{t_1 + t_2};$

$\left| \langle \vec{V} \rangle \right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{t_1 + t_2};$

$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{S}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{S}{2} + \frac{S}{2} \cdot \cos(\alpha)\right)^2} = \frac{S}{2} \cdot \sqrt{sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) + 2 \cdot \cos(\alpha)} =$

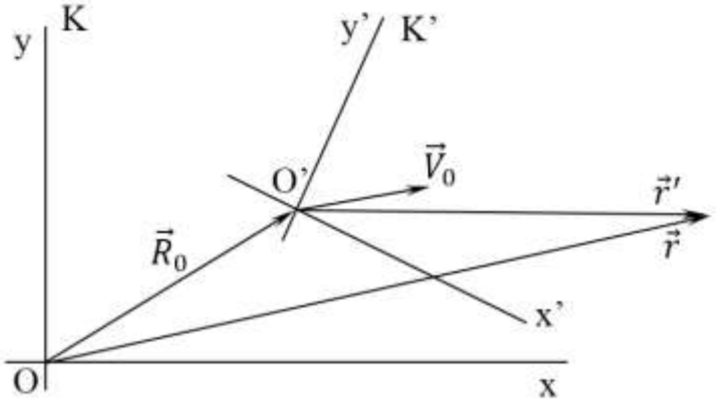
$= \frac{S}{2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)};$

$\left| \langle \vec{V} \rangle \right| = \frac{\frac{S}{2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)}}{\frac{S}{2 \cdot V_1} + \frac{S}{2 \cdot V_2}} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)}}{\frac{V_1 + V_2}{V_1 \cdot V_2}} = \frac{V_1 \cdot V_2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)}}{V_1 + V_2};$

$V_{\text{ср}n} = \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2};$

$$\left| \langle \vec{V} \rangle \right| = \frac{V_1 \cdot V_2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)}}{V_1 + V_2}.$$

2.1.5. Закон сложения скоростей. Преобразования Галилея



Очень часто нам необходимо рассматривать движение одного и того-же тела относительно двух разных наблюдателей, при этом один наблюдатель сам движется относительно другого.

Введем такие обозначения

Система отсчета (СО) K – условно неподвижная.

СО K' – условно подвижная.

$\vec{r}$ – радиус-вектор, с помощью которого наблюдатель определяет положение тела относительно системы K.

$\vec{R}_0$ – радиус-вектор, с помощью которого определяется начало координат системы К’ относительно К.

$\vec{r}'$ – радиус-вектор, относительно которого определяется положение тела относительно системы К’.

$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}_0$

Тогда скорости тел будут связаны следующим соотношением

$\vec{U} = \vec{V} - \vec{V}_0$

$\vec{U}$ – скорость тела в условно подвижной системе отсчета.

$\vec{V}$ – скорость тела в условно неподвижной системе отсчета.

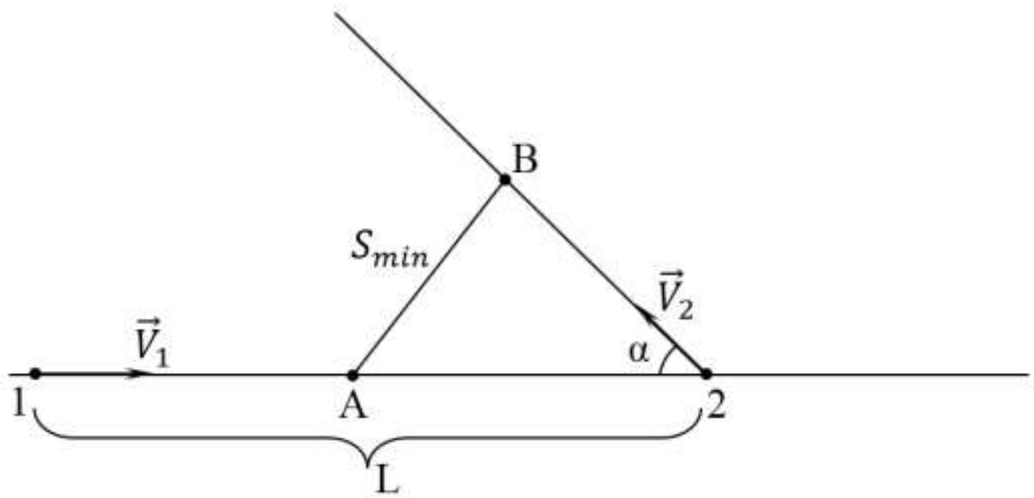
$\vec{V}_0$ – скорость подвижной системы относительно неподвижной.

Посмотрим где можно применить закон сложения скоростей.

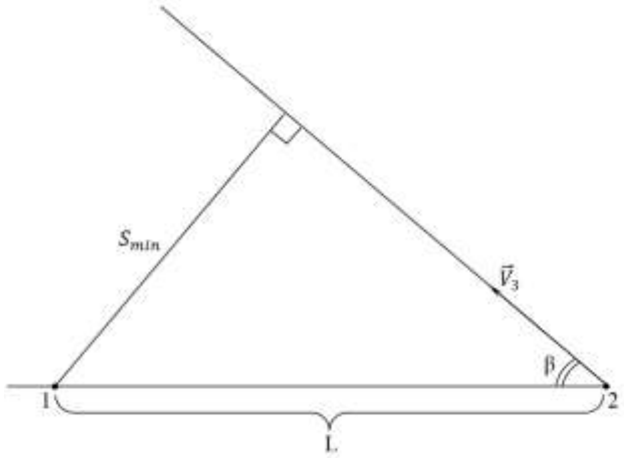
Пример 2.6.

Корабль 1 двигается по направлению к точке где в данный момент находится 2-ой корабль со скоростью V1; второй корабль плывет со скоростью V2 по направлению, составляющему острый угол α к отрезку, соединяющему корабли в начальный момент времени. Расстояние между кораблями в начале равно L. В какой момент времени t расстояние l между телами 1 и 2 будет минимальным и каково это расстояние.

Решение:



Перейдем в систему отсчета, связанную с первым кораблем. В этой системе отсчета первый корабль покоится, второй корабль движется равномерно прямолинейно относительно первого корабля со скоростью V_3, направленной под углом β к отрезку, соединяющему корабли в начальный момент времени.



$S_{min} = L \cdot \sin(\beta)$

Решаем задачу на сложение скоростей.

1,2) Видим две системы отсчета (СО) и одно тело, скорость которого измеряется относительно двух СО и оценим какая из них условно подвижная, а какая условно неподвижная.

СО – 1-ый корабль (Подвижная СО)

СО – Земля (Неподвижная СО)

Тело – 2-ый корабль

3) Просто вспомним что за скорости есть в нашей задаче

V_1 – скорость 1-ого корабля относительно Земли

V_2 – скорость 2-ого корабля относительно Земли

V_3 – скорость 2-ого корабля относительно 1-ого

4) Вспомним закон сложения скоростей в общем виде $\vec{U} = \vec{V} - \vec{V}_0$

5) Найдем соответствие между скоростями в законе и скоростями в нашей задаче:

$U - V_3$

$V - V_2$

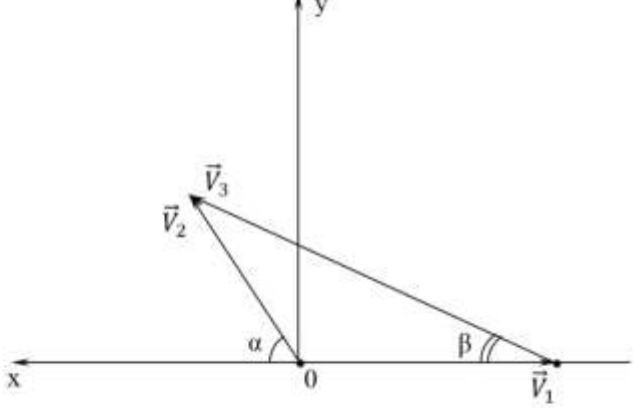
$V_0 - V_1$

Действия 1-5 можно сделать в уме.

6) Записываем закон сложения скоростей, применительно к нашей задаче:

$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

7) Нарисуем чертеж:



8).

$$\begin{cases} V_{3x} = V_{2x} - V_{1x} \\ V_{3y} = V_{2y} - V_{1y} \end{cases};$$

Найдем $\sin(\beta)$ двумя разными способами и следовательно S.

I способ:

$$\begin{cases} V_3 \cdot \cos(\beta) = V_2 \cdot \cos(\alpha) - (-V_1) \\ V_3 \cdot \sin(\beta) = V_2 \cdot \sin(\alpha) - 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} V_3 \cdot \cos(\beta) = V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1 \\ V_3 \cdot \sin(\beta) = V_2 \cdot \sin(\alpha) \end{cases};$$

$$\begin{cases} V_3^2 \cdot cos^2(\beta) = V_2^2 \cdot cos^2(\alpha) + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1^2 \\ V_3^2 \cdot sin^2(\beta) = V_2^2 \cdot sin^2(\alpha) \end{cases};$$

$$V_3^2\left(cos^2(\beta) + sin^2(\beta)\right) = V_2^2 \cdot cos^2(\alpha) + 2V_1V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1^2 + V_2^2 \cdot sin^2(\alpha);$$

$$V_3^2 = V_2^2 + V_1^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha);$$

$$V_3 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha);}$$

$$\sin(\beta) = \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{V_3};$$

$$\sin(\beta) = \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha)}}.$$

II способ.

$$\begin{cases} V_{3x} = V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1 \\ V_{3y} = V_2 \cdot \sin(\alpha) \end{cases};$$

$$tg(\beta) = \frac{V_{3y}}{V_{3x}} = \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1};$$

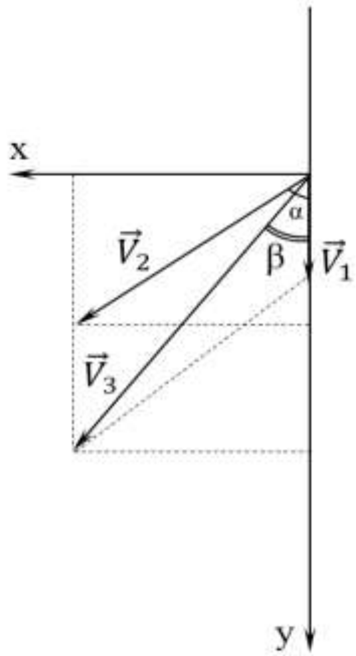
$$\sin(\beta) = \frac{V_{3y}}{V_3} = \frac{V_{3y}}{\sqrt{V_{3y}^2 + V_{3x}^2}} = \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha)}};$$

$$S_{min} = L \cdot \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha)}}.$$

Пример 2.7.

Воздушный шар движется на юг со скоростью V1 относительно земли. Наблюдатель, находящийся в корзине шара, замечает планер и определяет, что он движется относительно шара со скоростью V2 в направлении на юго-запад, при этом вектор скорости составляет угол α с меридианом. Найти направление движения и скорость планера относительно земли.

Решение:



СО – шар, подвижная

СО – Земля, неподвижная

V_1 – скорость шара относительно Земли

V_2 – планер относительно шара

V_3 – планер относительно Земли

$\vec{U} = \vec{V} - \vec{V}_0$

$U - V_2$

$V - V_3$

$V_0 - V_1$

$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 - \vec{V}_1$

$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

$V_{3x} = V_{2x} + V_{1x};$

$V_{3y} = V_{2y} + V_{1y};$

$V_{3x} = 0 + V_2 \cdot \sin(\alpha)\,;$

$V_{3y} = V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1;$

$V_3 = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2};$

$V_3 = \sqrt{V_2^2 \cdot sin^2(\alpha) + (V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1)^2};$

$V_3 = \sqrt{V_2^2 \cdot sin^2(\alpha) + V_2^2 \cdot cos^2(\alpha) + 2 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot V_1 + V_1^2};$

$V_3 = \sqrt{V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1^2};$

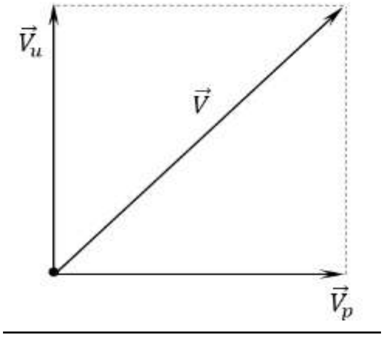
$tg(\beta) = \frac{V_{3x}}{V_{3y}};$

$$tg(\beta) = \frac{V_2 \cdot \sin(\alpha)}{V_2 \cdot \cos(\alpha) + V_1}.$$

Пример 2.8.

Скорость течения реки $V_р$=10 км/ч, скорость моторной лодки $V_л$=15 км/ч. Найти скорость лодки относительно берега, если лодка движется: а) вдоль течения; б) против течения; в) перпендикулярно течению.

Решение:



СО – вода, подвижная

СО – берег, неподвижная

Тело – лодка

V_p – скорость воды относительно берега

V_u – скорость лодки относительно воды

V– скорость лодки относительно берега

$\vec{U} = \vec{V} - \vec{V}_0$

$U - V_u$

$V - V$

$V_0 - V_p$

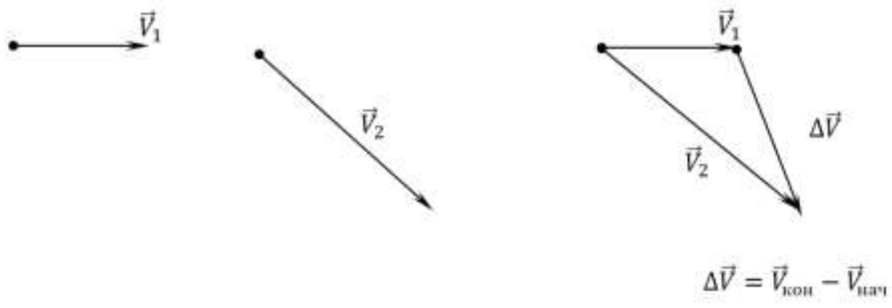
$\vec{V}_u = \vec{V} - \vec{V}_p$

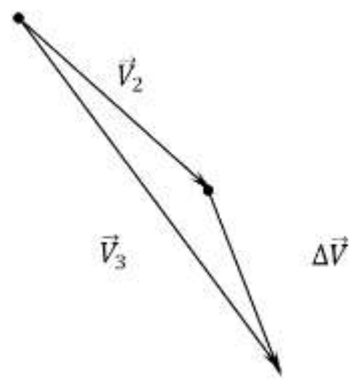
$\vec{V} = \vec{V}_u + \vec{V}_p$

$$V = \sqrt{V_u^2 + V_p^2}$$

2.1.6. Равноускоренное движение

За любые равные интервалы времени вектор скорости изменяется на одинаковую величину.





$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \cdots = \Delta t_N$$
$$\Delta\vec{V}_1 = \Delta\vec{V}_2 = \cdots = \Delta\vec{V}_N$$
$$\frac{\Delta\vec{V}_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta\vec{V}_2}{\Delta t_2} = \cdots = \frac{\Delta\vec{V}_N}{\Delta t_N} = \overrightarrow{const}$$

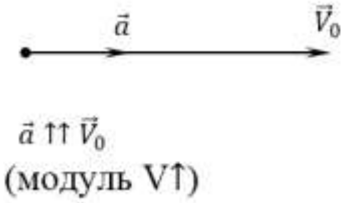
$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ – ускорение при равноускоренном движении.

2.1.7. Закон равноускоренного движения

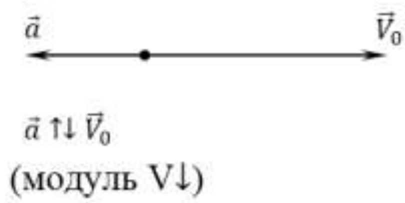
$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{const} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}\cdot t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0\cdot t + \dfrac{\vec{a}\cdot t^2}{2} \end{cases} \equiv \begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{const} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}\cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0\cdot t + \dfrac{\vec{a}\cdot t^2}{2} \end{cases}$$

Сначала рассмотрим равноускоренное прямолинейное движение, когда вектора $\vec{V}_0$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Если $\vec{V}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}$, то движение называется собственно равноускоренным (модуль скорости увеличивается). Если $\vec{V}_0 \uparrow\downarrow \vec{a}$, то движение называется собственно равнозамедленным (модуль скорости уменьшается).

Равноускоренное движение



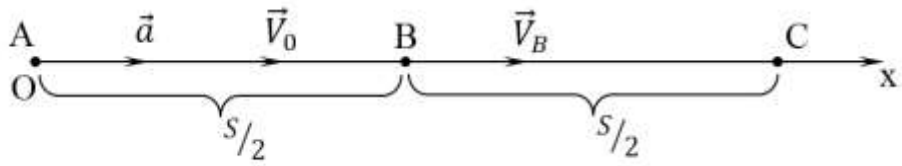
Равнозамедленное движение



Пример 2.9.

Тело, движущееся равноускорено, в некоторый момент преодолевает участок пути длиною S. Первую половину участка тело проходит за время T_1, а вторую половину за время T_2. С какой скоростью движется тело в середине участка?

Решение:



$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{const} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 \cdot t + \dfrac{\vec{a} \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = a \\ V_x = V_0 + a \cdot t \\ x - 0 = V_0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

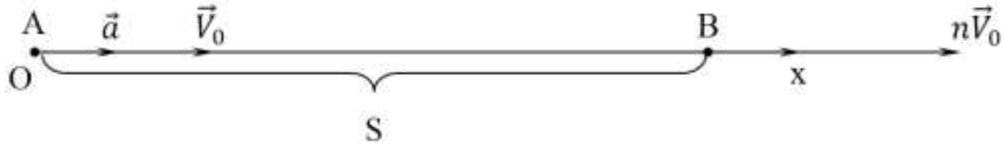
$$\begin{cases} V_B = V_0 + a \cdot T_1 \\ \dfrac{S}{2} = V_0 \cdot T_1 + \dfrac{a \cdot T_1^2}{2} \\ S = V_0 \cdot (T_1 + T_2) + \dfrac{a \cdot (T_1 + T_2)^2}{2} \end{cases}$$

$$V_B = S \frac{T_2^2 + 2T_1T_2 - 2T_1^2}{2T_1T_2(T_1 + T_2)}.$$

Пример 2.10.

За время t_0 тело прошло по прямой путь S, причем его скорость увеличилась в n раз. Считая движение равноускоренным с начальной скоростью отличной от нуля, определить величину ускорения тела.

Решение:



$$\begin{cases} \vec{a} = \overrightarrow{const} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 \cdot t + \dfrac{\vec{a} \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_x = a \\ V_x = V_0 + a \cdot t \\ x - 0 = V_0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} n \cdot V_0 = V_0 + a \cdot t_0 \\ S = V_0 \cdot t_0 + \dfrac{a \cdot t_0^2}{2} \end{cases};$$

$$a = \frac{n \cdot V_0 - V_0}{t_0}; \quad S = V_0 \cdot t_0 + \frac{\frac{n \cdot V_0 - V_0}{t_0} \cdot t_0^2}{2} = V_0 \cdot t_0 + \frac{t_0 \cdot (n \cdot V_0 - V_0)}{2} =$$

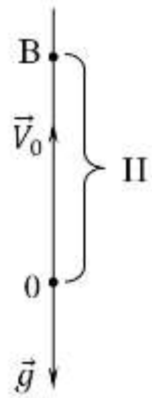
$$= 2 \cdot V_0 \cdot t_0 + n \cdot V_0 \cdot t_0 - V_0 \cdot t_0 = V_0 \cdot t_0 + n \cdot V_0 \cdot t_0 = V_0 \cdot t_0 \cdot (1 + n);$$

$$S = V_0 \cdot t_0 \cdot (1 + n).$$

Пример 2.11.

Камень брошен с начальной скоростью V_0 вертикально вверх. Найти время t движения камня до того момента, когда он впервые окажется на высоте H над точкой бросания.

Решение:



$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 \cdot t + \dfrac{\vec{g} \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ V_y = V_0 - g \cdot t \\ y - 0 = V_0 \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$H = V_0 \cdot T - \frac{g \cdot T^2}{2};$$

$$-\frac{g \cdot T^2}{2} + V_0 \cdot T - H = 0;$$

$$D = V_0^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot H = V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H;$$

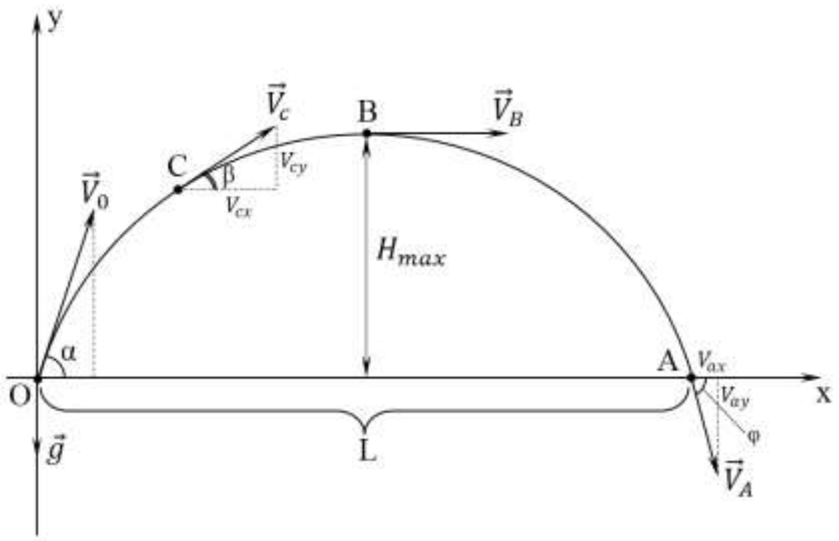
$$T_1 = \frac{-V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{2 \cdot \left(-\frac{g}{2}\right)} = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{g};$$

$$T_2 = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{2 \cdot \left(-\frac{g}{2}\right)} = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{g}.$$

Так как просят найти время, когда камень первый раз окажется на высоте H, то выбираем меньший положительный корень T_2.

Пример 2.12.

Тело брошено с поверхности земли со скоростью V_0, направленной под углом α к горизонту. Найти траекторию движения тела, дальность полета, время полета, максимальную высоту подъема, угол, который составляет вектор скорости в некоторый известный момент времени Т, а также угол, который составляет вектор скорости в момент падения на землю.



Записываем закон равноускоренного движения:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha) + 0 \\ V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha) + (-g) \cdot t \\ x - 0 = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + 0 \\ y - 0 = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + \dfrac{(-g) \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 \cdot t + \dfrac{\vec{g} \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

1) Отвечаем на первый вопрос траектория движения – это кривая, описываемая функцией y(x), возьмем два последних уравнения, из первого выразим t и подставим во второе

$$t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)};$$

$$y = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2;$$

$$y = tg(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot V_0^2 \cdot cos^2(\alpha)} \cdot x^2.$$

Получили уравнение параболы, ветви вниз, при x=0 y=0.

2) Найдем дальность полета, она равна координате x точки A, при этом координата y точки A равна 0:

$$\begin{cases} L = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t_A \\ 0 = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t_A - \dfrac{g \cdot t_A^2}{2}; \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $t_{A1} = \frac{V_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$, $t_{A2} = 0$, что соответствует двум моментам времени, когда тело оказалось в точках с координатой y=0, нас естественно интересует t_{A1}, подставим его в первое уравнение

$$L = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g};$$

3) Очевидно, что отвечая на второй вопрос, мы уже нашли время полета, давайте попробуем найти его другим способом. Парабола – симметричная функция, следовательно, время подъема t_{OB} равно времени падения t_{BA} и равно половине времени полета

$$t_{OB} = t_{BA};$$

$$t_{\text{пол}} = 2 \cdot t_{OB};$$

Рассмотрим верхнюю точку на траектории – B, в ней проекция скорости на ось y равна 0

$$V_{By} = 0;$$

$$0 = V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_{OB};$$

$$t_{OB} = \frac{V_0 \cdot \sin(\alpha)}{g};$$

$$t_{\text{пол}} = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin(\alpha)}{g};$$

4) Найдем максимальную высоту подъема, очевидно она равна координате y точки B

$$H_{max} = y_B;$$

$$H_{max} = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t_{OB} - \frac{g \cdot t_{OB}^2}{2} = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}\right) - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}\right)^2;$$

$$H_{max} = \frac{V_0^2 \cdot sin^2(\alpha)}{2 \cdot g};$$

5) Пусть в момент времени T тело находится в точке C. Нарисуем вектор скорости в этой точке, видим, что тангенс искомого угла связан с проекциями вектора скорости в точке C на оси x и y:

$$\begin{cases} tg(\beta) = \dfrac{V_{cy}}{V_{cx}} \\ V_{cx} = V_0 \cdot \cos(\alpha) \\ V_{cy} = V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot T \end{cases};$$

$$tg(\beta) = \frac{V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot T}{V_0 \cdot \cos(\alpha)};$$

6) Угол зависит от проекций скорости точки A:

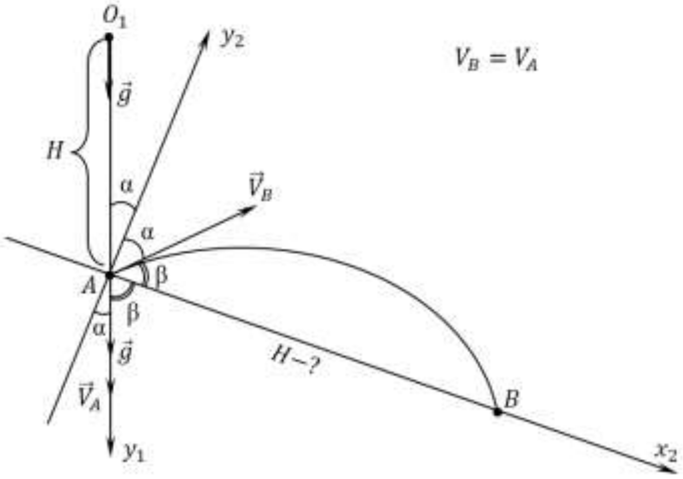
$$\begin{cases} tg(\varphi) = \dfrac{V_{ay}}{V_{ax}} \\ V_{ax} = V_0 \cdot \cos(\alpha) \\ V_{ay} = V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_A = V_0 \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot V_0 \cdot \sin(\alpha) = -V_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases};$$

$$tg(\varphi) = \frac{-V_0 \cdot \sin(\alpha)}{V_0 \cdot \cos(\alpha)} = -tg(\alpha).$$

Пример 2.13.

Шарик с нулевой начальной скоростью падает с высоты H на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. На каком расстоянии от места падения он ударится о плоскость второй раз? Удар о плоскость считать абсолютно упругим.

Решение:



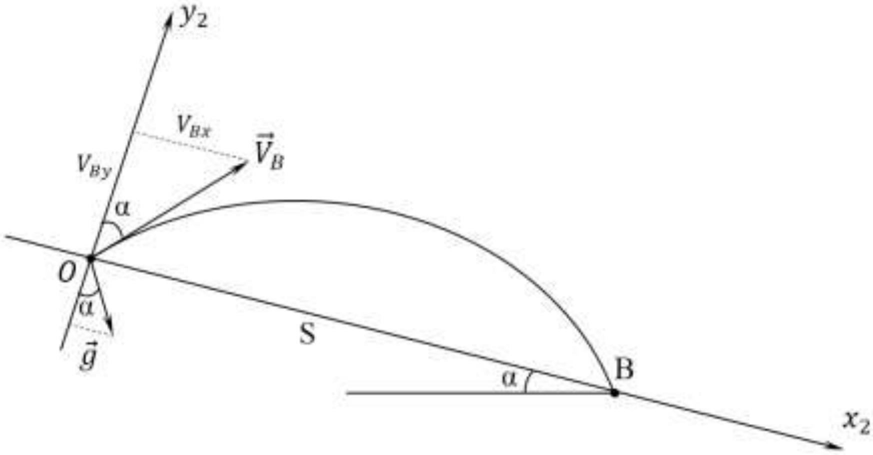
I часть. Ищем $V_A = V_B$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{g} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \dfrac{\vec{g} \cdot t^2}{2} \end{cases}; \begin{cases} a_y = g \\ V_y = g \cdot t \\ y = \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}; \begin{cases} V_A = g \cdot t_A \\ H = \dfrac{g \cdot t_A^2}{2} \end{cases};$$

$$t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}};$$

$$V_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} => V_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}.$$

II часть. Ищем S



$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{V}_B + \vec{g} \cdot t \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_B \cdot t + \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_x = g \cdot \sin(\alpha) \\ a_y = -g \cdot \cos(\alpha) \\ V_x = V_B \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) \cdot t \\ V_y = V_B \cdot \cos(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ x - 0 = V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot t + \dfrac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2}{2} \\ y - 0 = V_B \cdot \cos(\alpha) \cdot t - \dfrac{g \cdot \cos(\alpha) \cdot t^2}{2} \end{cases};$$

$$S = V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot t_B + \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot t_B^2}{2} = \sin(\alpha) \cdot t_B \cdot \left(V_B + \frac{g \cdot t_B}{2}\right);$$

$$0 = V_B \cdot \cos(\alpha) \cdot t_B - \frac{g \cdot \cos(\alpha) \cdot t_B^2}{2};$$

$$0 = t_B \cdot \left(V_B - \frac{g \cdot t_B}{2}\right);$$

$$t_B = 0 \text{ или } V_B - \frac{g \cdot t_B}{2} = 0;$$

$$V_B = \frac{g}{2} \cdot t_B;$$

$$\frac{2 \cdot V_B}{g} = t_B;$$

$$S = \sin(\alpha) \cdot \frac{2 \cdot V_B}{g} \cdot \left(V_B + \frac{g}{2} \cdot \frac{2 \cdot V_B}{g}\right);$$

$$S = \sin(\alpha) \cdot \frac{4 \cdot V_B^2}{g}.$$

2.1.8. Ускорение

Это векторная физическая величина, равная пределу при $\Delta t \to 0$ отношения приращения вектора скорости к интервалу времени в течение которого оно совершено

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

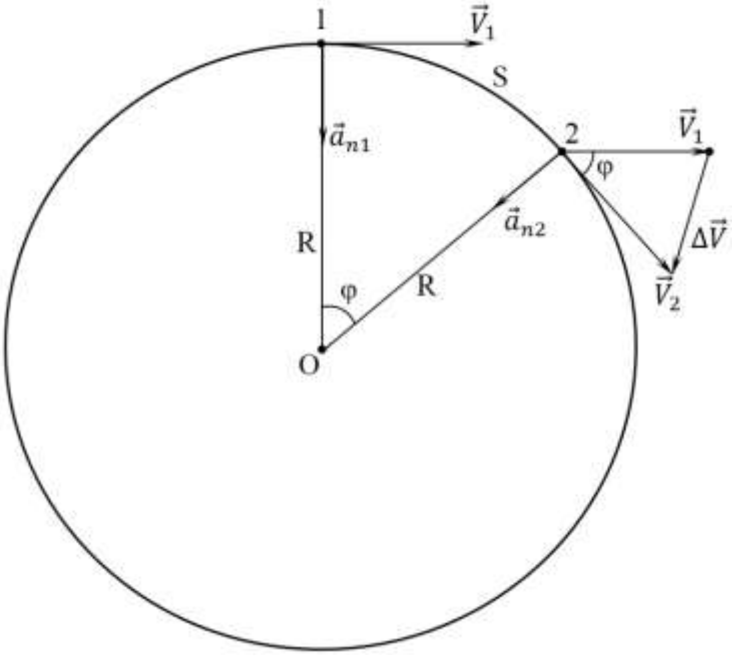
Для нас главное, если вектор скорости меняется (даже при неизменном модуле скорости), то есть ускорение. Другими словами, любое криволинейное движение происходит с ускорением.

2.1.9. Равномерное движение по окружности

Траектория движение – окружность; модуль скорости V = const.

Угол в радианах.

$$\varphi = \frac{S}{R}\,[\text{рад}]$$



Характеристики равномерного движения по окрестности.

1). Угловая скорость (скорость поворота радиуса).

$$\omega = \frac{\varphi}{\Delta t}\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$$

$$S = V \cdot \Delta t;\ \varphi = \frac{S}{R};\ \omega = \frac{V \cdot \Delta t}{R \cdot \Delta t}.$$

$$\omega = \frac{V}{R}$$

2). Период – время полного оборота равен отношению пути пройденного за один оборот к модулю скорости.

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{V}$$

3). Частота – количество оборотов за единицу времени равна отношению единицы времени к времени одного оборота.

$$\vartheta = \frac{1}{T} = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

4). Нормальное (центростремительное) ускорение.

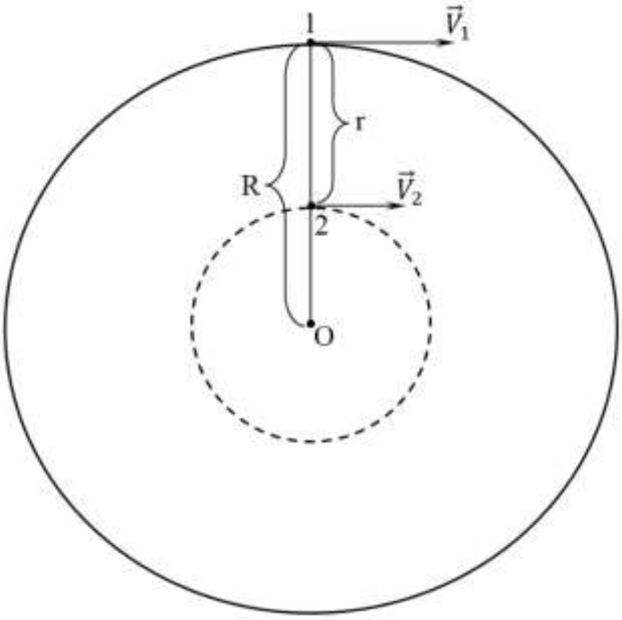
$\vec{a}_n \perp \vec{V}$ ($\vec{a}_n$ к центру)

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Пример 2.14.

Линейная скорость точек обода, вращающегося диска v_1=3м/с, а точек, находящихся на расстоянии r=10см ближе к оси вращения, v_2=2м/с. Найти частоту вращения диска.

Решение:

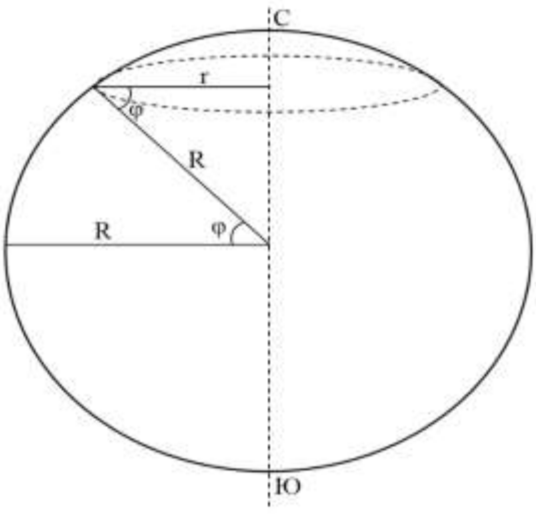


$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta;$$
$$\vartheta = \frac{V_1}{2 \cdot \pi \cdot R};$$
$$\vartheta = \frac{V_2}{2 \cdot \pi \cdot (R - r)}.$$

Пример 2.15.

В каком направлении и с какой минимальной скоростью должен лететь самолет на широте Санкт-Петербурга (60^0 северной широты), чтобы его экипаж не замечал, как ночь сменяет день? Радиус Земли принять равным 6400 км.

Решение:



$T = 24$ ч;

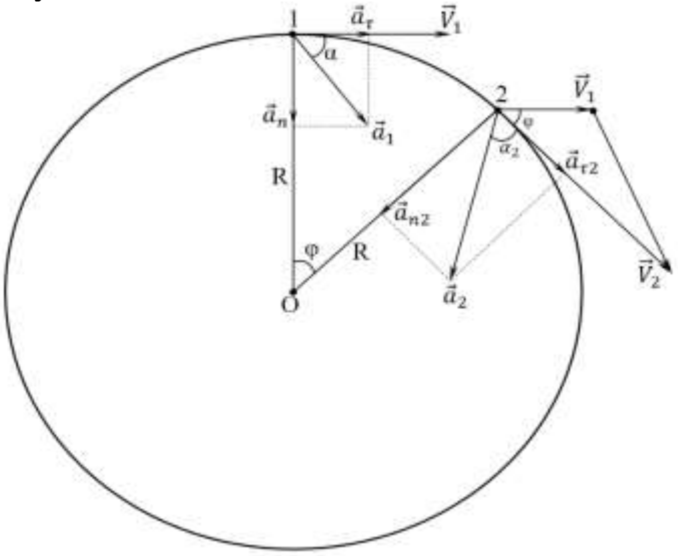
$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{V} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(\varphi)}{V};$$

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \cos(\varphi)}{T} = \frac{\pi \cdot R}{T} \approx \frac{3 \cdot 6400 \cdot 10^3}{24 \cdot 3600} = 800 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

2.1.10. Равноускоренное движение по окружности

Траектория движения – окружность.

За любые равные интервалы времени модуль скорости изменяется на одинаковую величину.



Данное движение удобно рассматривать, разложив ускорение на две перпендикулярные составляющие, одна $\vec{a}_n$ уже знакомая нам составляющая перпендикулярная вектору скорости, вторая $\vec{a}_\tau$ составляющая параллельная вектору скорости

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2};$

$tg(\alpha) = \frac{a_n}{a_\tau}.$

a_τ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения – проекция ускорения на вектор скорости.

Данное движение будет рассматриваться как два одновременно происходящих движения:

1). Равноускоренное прямолинейное с постоянным тангенсальным ускорением;

2). Равномерное движение по окружности, но только в данный момент времени.

2.1.11. Законы равноускоренного движения по окружности

Равноускоренное движение по окружности удобно рассматривать, как два одновременно происходящих движения:

- равноускоренное прямолинейное с постоянным ускорением a_τ;

- равномерное по окружности, но только в данный момент времени.

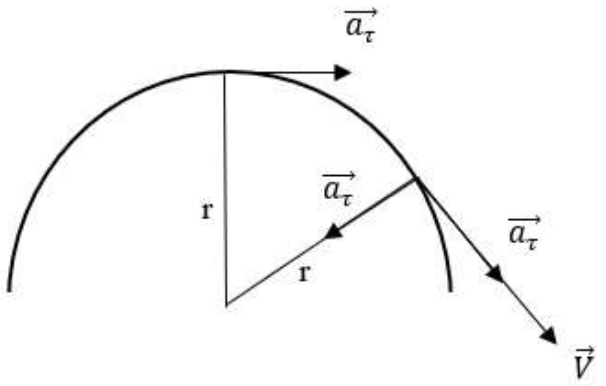
$$\begin{cases} \begin{cases} V = V_0 + a_\tau t \\ S = V_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2} \end{cases} ; \\ a_{n_i} = \dfrac{V_i^2}{R} \end{cases}$$

Обратим внимание, что вместо последнего уравнения может быть написано любое другое (период, частота, угловая скорость) для равномерного движения по окружности радиуса R со скоростью V_i

a_τ – алгебраическая величина, если движение происходит с увеличением модуля скорости, то $a_\tau > 0$, если модуль скорости уменьшается, то $a_\tau < 0$.

Пример 13.25

Тело начинает движение по окружности радиуса r, модуль скорости изменяется по закону V = kt. Найти зависимость ускорения от времени.



$a_n = \dfrac{V^2}{r}$;
$V(t = 1) = 0$;
$a_n(t = 0) = 0$;

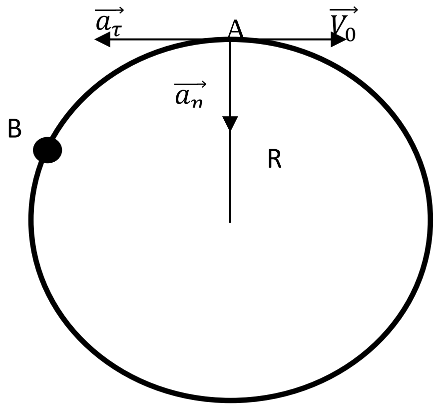
$$\begin{cases} a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \\ a_\tau = k \\ a_n = \dfrac{k^2 t^2}{r} \end{cases} ;$$

$$a = \sqrt{k^2 + \frac{k^4 t^4}{r^2}}.$$

Пример 2.16.

Маховое колесо, вращающееся с частотой n, останавливается в течение промежутка времени t. Найти число оборотов N, сделанных колесом до полной остановки.

Решение:



Запишем законы равнозамедленного движения по окружности:

$V = V_0 - a_\tau t;$

$S = V_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2};$

Скорость в конечной точке B равна 0, при это путь пройденный точкой до остановки равен произведению длины окружности $2\pi R$ на количество оборотов N

$V_B = 0;$

$$\begin{cases} 0 = V_0 - a_\tau t \\ N \cdot 2\pi R = V_0 t_1 - \frac{a_\tau {t_1}^2}{2}; \\ \nu = \frac{V_0}{2\pi R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 = a_\tau t \\ N \cdot 2\pi R = V_0 t_1 - \frac{a_\tau {t_1}^2}{2}; \\ V_0 = \nu 2\pi R \end{cases}$$

$a_\tau = \frac{V_0}{t_1} = \frac{\nu 2\pi R}{t_1};$

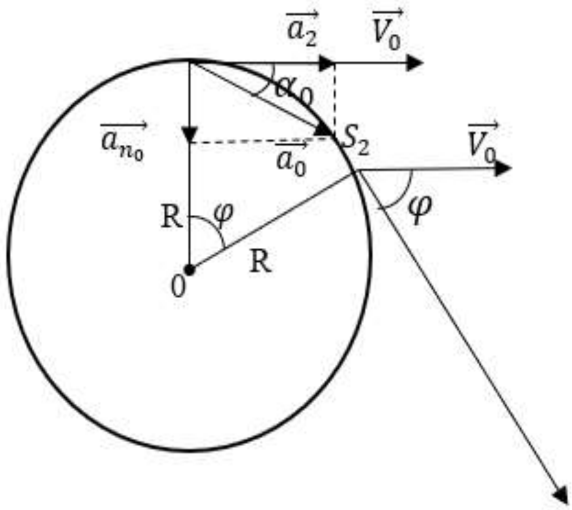
$N \cdot 2\pi R = 2\pi R \nu t_1 - \frac{\frac{\nu 2\pi R {t_1}^2}{t_1}}{2};$

$N = \nu t_1 - \frac{\nu t_1}{2};$

$$N = \frac{1}{2}\,\nu t_1.$$

Пример 2.17.

Тело движется по окружности равноускорено. В начальный момент времени скорость тела равна V_0, ускорение a_0 и составляет угол α_0 с вектором скорости. Найти приращение модуля скорости через время t_2, угол на который повернется за это время вектор скорости и угловую скорость в этот момент времени.



$a_\tau = a_0 cos\alpha_0;$
$V_2 = V_0 + a_0 cos\alpha_0 t_2;$
$a_{n_0} = a_0 sin\alpha_0;$
$a_{n_0} = \frac{V_0^2}{R}.$

Заметим, что так как мы знаем величину нормального ускорения, мы можем найти радиус окружности

$$R = \frac{V_0^2}{a_0 sin\alpha_0};$$

Запишем закон равноускоренного движения по окружности

$$\begin{cases} V = V_0 + a_\tau t \\ S = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}; \end{cases}$$

① Для ответа на первый вопрос найдем модуль скорости в момент t_2

$V_2 = V_0 + a_\tau t_2;$
$\Delta|V| = V_2 - V_0 = a_0 cos\alpha_0 t_2;$

② Так как угол между векторами скорости равен углу между радиусами, то воспользуемся определением угла в радианах, разделим длину дуги окружности, т.е. путь пройденный телом за время t_2 на радиус окружности

$\varphi = \frac{s_2}{R};$

$s_2 = V_0 t_2 + \frac{a_0 cos\alpha_0 t_2^2}{2};$

$$\varphi = \frac{(V_0 t_2 + \frac{a_0 cos\alpha_0 t_2^2}{2})}{(\frac{V_0^2}{a_0 sin\alpha_0})}.$$

③ Угловую скорость в момент t_2 найдем как отношение линейной скорости в этот момент времени к радиуса окружности

$$\omega = \frac{V_2}{R} = \frac{V_0 + a_0 cos\alpha_0 t_2}{(\frac{V_0^2}{a_0 sin\alpha_0})};$$

2.2. ДИНАМИКА

Это раздел механики, изучающий причины возникновения движения.

Введем новые понятия.

Сила – это векторная физическая величина, являющаяся количественной мерой действия одного тела на другое.

Масса – скалярная физическая величина (СФВ) является мерой инертности.

Инертность – способность тела двигаться равномерно, прямолинейно, при отсутствии действия на него другого тела.

2.2.1. Законы Ньютона

I закон Ньютона:

Существуют такие системы отсчета, в которых тело движется равномерно, прямолинейно либо покоится, при отсутствии действующего на него другого тела. (Всегда выбирай систему, неподвижную относительно поверхности земли)

II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$$

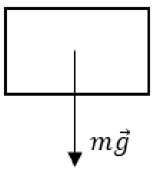
III Закон Ньютона:

Действие одного тела на другое носит характер взаимодействия.

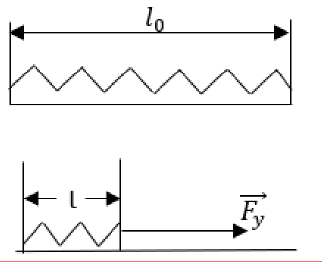
$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$.

2.2.2. Силы в природе

1). Сила тяжести – это сила с которой планета Земля, действует на тело массы m, находящееся вблизи поверхности Земли.



2). Сила упругости – это сила с которой пружина действует на тело с ней соприкасающееся, пропорциональна деформации пружины.



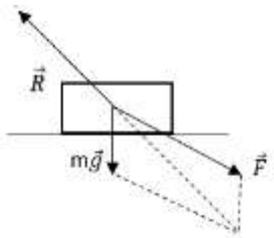
l_0-длина нерастянутой пружины; l-длина деформации пружины.

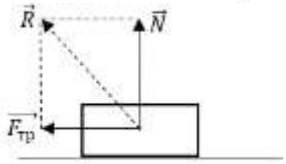
$F_y = k\Delta l$;

$\Delta l = |l - l_0|$ – деформация.

3). Силы трения.

А) покоя





$\vec{R}$-сила с которой опора действует на брусок;

$m\vec{g} + \vec{r} + \vec{R} = 0$ (если покоится);

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$;

$F_{тр\ пок\ max} = \mu N$;

$F_{тр\ пок} = F_{сдв}$;

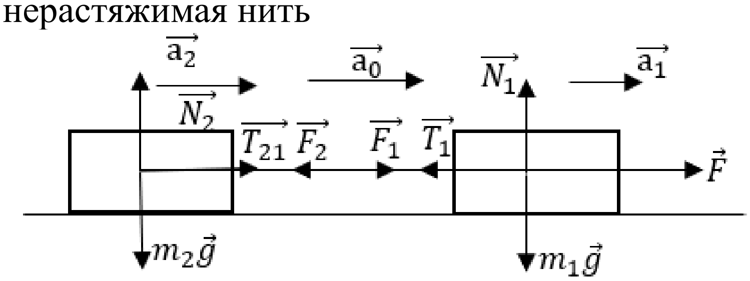
$0 \leq F_{тр\ пок} \leq F_{тр\ пок\ max}$.

Заметим, что для вычисления силы трения покоя нет никакой формулы

Б) Силы трения скольжения:

$F_{тр\ скольж} = \mu N$ -закон скольжения

4)Невесомая нерастяжимая нить



Запишем второй закон Ньютона (IIЗН) для тел m_1, m_2 и нити $m_0 = 0$, здесь $\vec{F}$ – сила, действующая на первое тело извне, $\vec{T_1}$ – сила с которой нить действует на первое тело, $\vec{T_2}$ – сила с которой нить действует на второе тело, $\vec{F_1}$ – сила с которой первое тело действует на нить, $\vec{F_2}$ – сила с которой dnjhjt тело действует на нить.

$m_1\vec{a_1} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{N_1}$;

$m_2\vec{a_2} + m_2\vec{g} + \vec{T_2} + \vec{N_2}$;

$m_0\vec{a_0} + \vec{F_1} + m_0\vec{g} + \vec{F_2}$;

Запишем третий закон Ньютона (III ЗН):

$$\left.\begin{aligned}\vec{F_1} &= -\vec{F_2}\\ \vec{F_1} &= -\vec{T_1}\\ \vec{F_2} &= -\vec{T_2}\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{T_1}=-\vec{T_2} => T_1=T_2=\text{T}}$$

За Δt первое тело сместилось на Δx_1, второе тело – на $\Delta x_2 = \Delta x_1$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} (\Delta t \to 0)$$

$$V_{2X} = V_{1X};\ (V_X = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t});$$

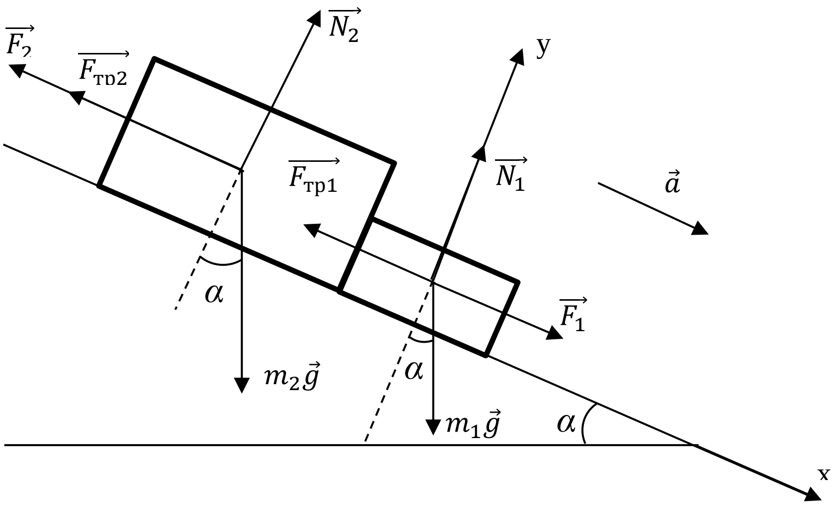
$$=> a_{\tau X} = a_{\tau X};$$

$$a_1 = a_2 = a$$

Таким образом получается, если два тела связаны невесомой, нерастяжимой нитью, то они движутся с одинаковыми по <u>модулю</u> ускорениями и нить действует на тела с одинаковой по <u>модулю</u> силой.

Пример 2.18.

На наклоненную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили бруски массами m_1 и m_2. Коэффициенты трения между брусками и плоскостью k_1 и k_2, соответственно (k_1>k_2). Найти силу взаимодействия между брусками в процессе движения. При каких значениях угла α движения не будет?



По II закону Ньютона:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{F_{тр1}} + \vec{N_1} + \vec{F_1};$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{F_{тр2}} + \vec{N_2} + \vec{F_2};$$

$$m_1 a = m_1 g sin(\alpha) - F_{тр1} + 0 + F_1;$$

$$0 = -m_1 g cos(\alpha) + 0 + N_1 + 0;$$

$$m_2 a = m_2 g sin(\alpha) - F_{тр2} + 0 + F_2;$$

$$0 = -m_2 g cos(\alpha) + 0 + N_2 + 0;$$

По закону скольжения:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}1} = k_1 N_1 \\ F_{\text{тр}2} = k_2 N_2 \end{cases};$$

По III закону Ньютона:

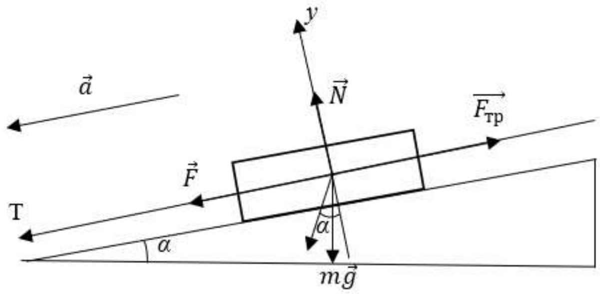
$F_1 = F_2 = F;$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g sin\,\alpha - k_1 m_1 g cos\alpha + F \\ m_2 a = m_2 g sin\,\alpha - k_2 m_2 g cos\alpha - F \end{cases};$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 g sin\,\alpha - k_1 m_1 g cos\alpha + F}{m_2 g sin\,\alpha - k_2 m_2 g cos\alpha - F};$$

Пример 2.19.

Тело движется вниз по наклонной плоскости с углом наклона α, коэффициент трения μ. Найдите ускорение тела.



$m_1\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}};$

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = \mu \text{N} \\ ox: ma = -F_{\text{тр}} + mg sin\,\alpha \\ oy: 0 = N - mg sin\,\alpha \end{cases};$$

$N = mg cos\alpha;$

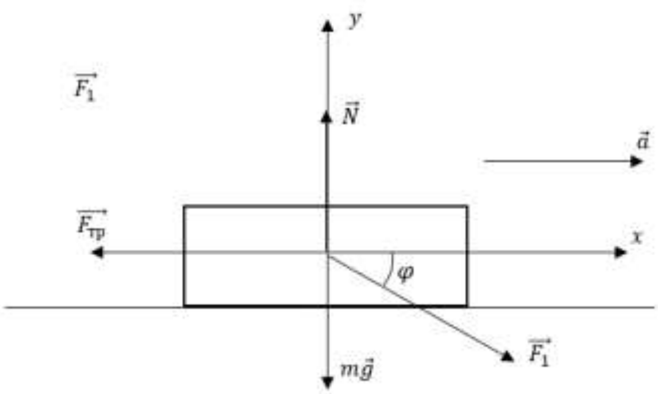
$F_{\text{тр}} = \mu mg cos\alpha;$

$ma = -\mu mg cos\alpha + mg sin\,\alpha;$

$a = g(sin\,\alpha - \mu cos\alpha).$

Пример 2.20.

Найти ускорение тела на столе массы m, на которое действует сила F_1, направленная под углом φ к горизонту. Коэффициент трения k.



$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_1} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}};$

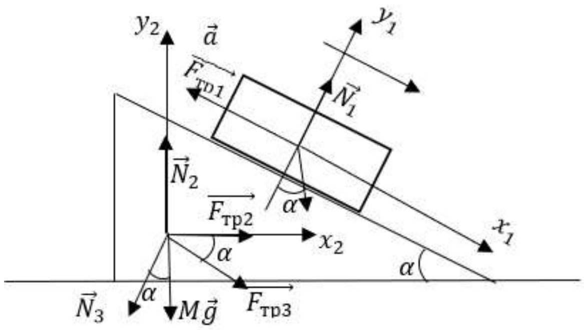
$a: ma = -F_{\text{тр}} + F_1 \cos\varphi;$

$oy: 0 = N - mg - F_1 \sin\varphi;$

$F_{тр} = kN$;
$N = mg + F_1 \sin\varphi$;
$F_{тр} = k(mg + F_1 \sin\varphi)$;
$ma = -k(mg + F_1 \sin\varphi) + F_1 \cos\varphi$;
$a = \dfrac{-k(mg + F_1 \sin\varphi) + F_1 \cos\varphi}{m}$;

Пример 2.21.

Призма находится на горизонтальном шероховатом столе (см. рис). На поверхность призмы, составляющую угол α с горизонтом, положили брусок массой m и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой μ. Найти силу трения $F_{тр}$, между призмой и столом.



$\begin{cases} N_3 = N_1 \\ F_{тр3} = F_{тр1} \end{cases}$; III Закон

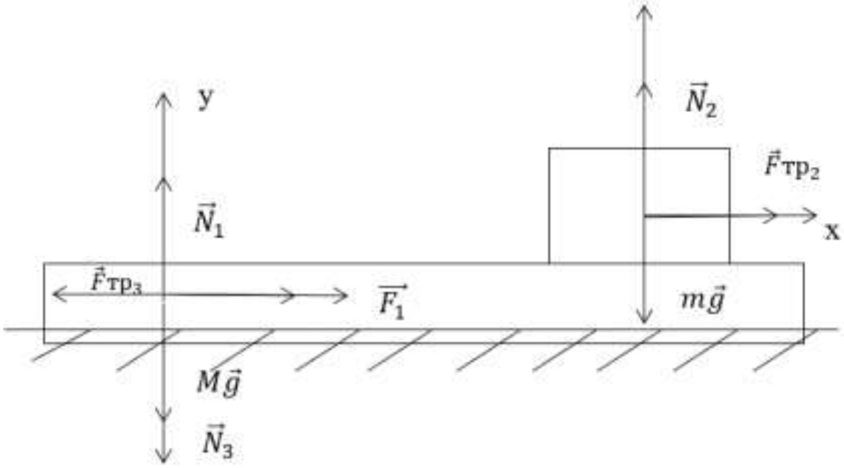
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_1} + \vec{N_1} + \overrightarrow{F_{тр1}}$;
$0 = \vec{N_3} + M\vec{g} + \overrightarrow{F_{тр3}} + \overrightarrow{F_{тр2}} + \vec{N_2}$;
$0x_1 : ma = -F_{тр1} + mg\sin\alpha$;
$0y_1 : 0 = N_1 - mg\cos\alpha$;
$F_{тр1} = \mu_1 N_1$;
$0x_2 : 0 = -\boxed{N_1}\sin\alpha + \boxed{F_{тр1}}\cos\alpha + \boxed{F_{тр2}}$;
$0y_2 : 0 = -N_1\cos\alpha - Mg - F_{тр1}\sin\alpha + N_2$;

Решим получившуюся систему уравнений:
$F_{тр2} = mg\cos\alpha - \mu_1 mg\cos^2\alpha$;

Для решения следующих задач сформулируем условия начала скольжения тела, лежащего на подвижной опоре:
1. Сила трения уже достигла значения μN (Fтр$_n$ = max)
2. Ускорение тела пока еще равно ускорению опоры

Пример 2.22.

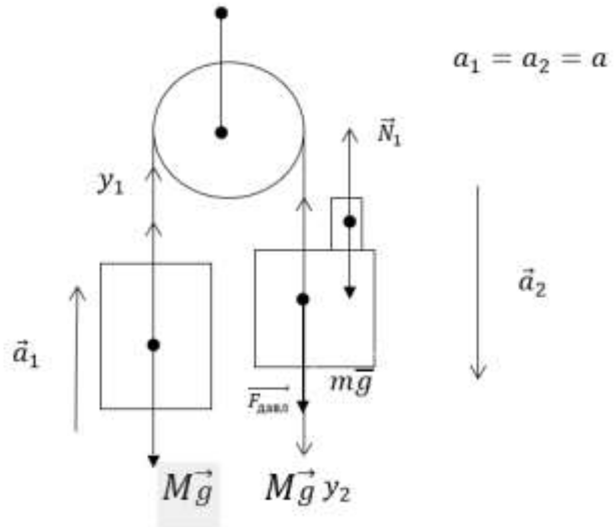
На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы M и на ней брусок массы m. Какую минимальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок начал двигаться по ней? Сила прикладывается в горизонтальном направлении, коэффициент трения между доской и бруском равен k.



$N_2 = N_3$ (IIIЗН)
$F\text{тр}_3 \ = F\text{тр}_2$ (IIIЗН)
$m\vec{a} = \vec{F}\text{тр}_2 + \vec{N}_2 + m\vec{g}$ (IIЗН)
$\mu\vec{a} = \mu\vec{g} + \overrightarrow{N_3} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{N_1} + \ \overrightarrow{F_{\text{тр}_3}}$;
O_x: $ma = \ F\text{тр}_2$;
O_y: $O = N_2 - mg$;
O_x: $Ma = \ F_1 - F\text{тр}_2$;
O_y: $O = N_1 - Mg - N_2$;
$F\text{тр}_2 \ = k \cdot N_2$;
$F_1 = k(M + m)g$.

Пример 2.23.

На легкой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены одинаковые грузы массы M. На один из них кладут перегрузок массы m. Определить, с какой силой давит перегрузок на груз во время движения. Трением пренебречь.



$F_{\text{давл}} = N_1$ (IIIЗН)
$M\overrightarrow{a_1} = \mu M + \vec{T}_1$;
$M\overrightarrow{a_2} = M\vec{g} + F_{\text{давл}} + \vec{T}_1$;

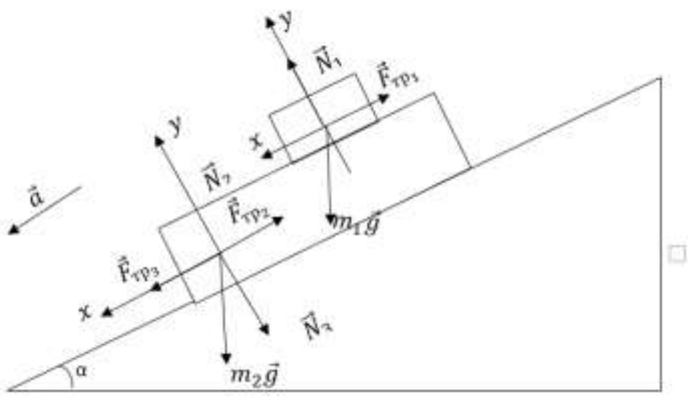
$m\overrightarrow{a_2} = m\vec{g} + \vec{N}_1;$
$O_{y_1}: \mu a = \ T_1 - \mu g;$
$O_{y_2}: \mu a = N_1 + \mu g \ - T_1;$
$O_{y_2}: ma = mg - N_1;$

Решим получившуюся систему уравнения относительно N_1:

$$N_1 = \frac{2\mu ma}{m + 2\mu}.$$

Пример 2.24.

На наклонную плоскость с углом α помещена плоская плита массой m_2, а на нее - брусок массой m_1. Коэффициент трения между бруском и плитой k_1. Определить, при каких значениях коэффициента трения k_2 между плитой и плоскостью плита не будет двигаться, если известно, что брусок скользит по плите.



$F\text{тр}_1 \ = F\text{тр}_3;$
$F_{\text{тр}_3} = F_{\text{тр}_1}$ (IIIЗН)
$N_3 = N_1$ (IIIЗН)
$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}_1};$
$O = m_2\vec{g} + \vec{N}_3 + \vec{F}_{\text{тр}_2} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}_3};$
$O: ma = m_1 g \cdot sin - F_{\text{тр}_1};$
$O = N_1 - \ m_1 g \cdot cos\alpha;$
$N_1 = m_1 g \cdot cos\alpha;$
$F_{\text{тр}_1} = k_1 \cdot m_1 g \cdot cos\alpha;$
$N_2 = m_2 g \cdot cos\alpha + m_1 g \cdot cos\alpha;$
$F_{\text{тр}_2} = k_1 \cdot m_1 g \cdot cos\alpha + \ m_2 g \cdot$
$F_{\text{тр}_1} = \ k_1 \cdot N_1;$
$O_x: O \ = F_{\text{тр}_1} - F_{\text{тр}_2} + m_2 g \cdot sin\alpha;$
$O = N_2 - m_2 g \cdot cos\alpha - N_1;$
$F_{\text{тр}_2} = \ k_2 \cdot N_2;$

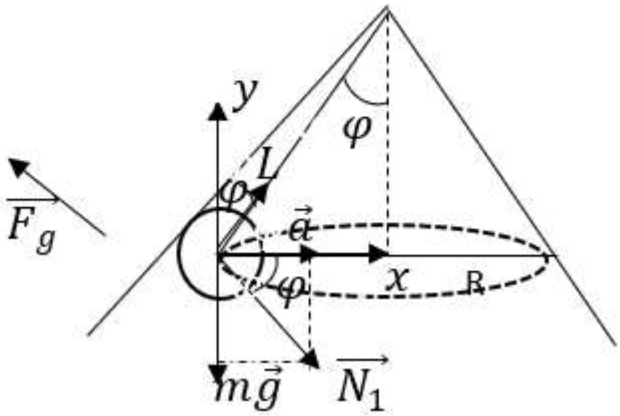
$$k_2 = \frac{k_1 \cdot m_1 g \cdot cos\alpha + m_2 g \cdot sin\alpha}{m_2 g \cdot cos\alpha + m_1 g \cdot cos\alpha}.$$

Пример 2.25.

Конус с углом полураствора φ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси симметрии. Внутри конуса находится шарик массой m, удерживаемый на расстоянии L от вершины конуса с помощью нити. Найти натяжение нити и силу давления шарика на поверхность.

Дано:
L
φ
ω
m

T-?
F_g−?



$R = L\sin\varphi;$
$F_g = N_1$ - (IIIЗН)

Запишем второй закон Ньютона для шарика:

$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{N_1} + \vec{T};$

$Ox: ma = N_1\cos\varphi + T\sin\varphi;$

$Oy: 0 = -mg - N_1\sin\varphi + T\cos\varphi;$

Учтем, что шарик движется равномерно по окружности радиуса $L\sin\varphi$ с нормальным ускорением: $a = \omega^2 L\sin\varphi$

$m\omega^2 L\sin\varphi = N_1\cos\varphi + T\sin\varphi;$

$mg = -N_1\sin\varphi + T\cos\varphi;$

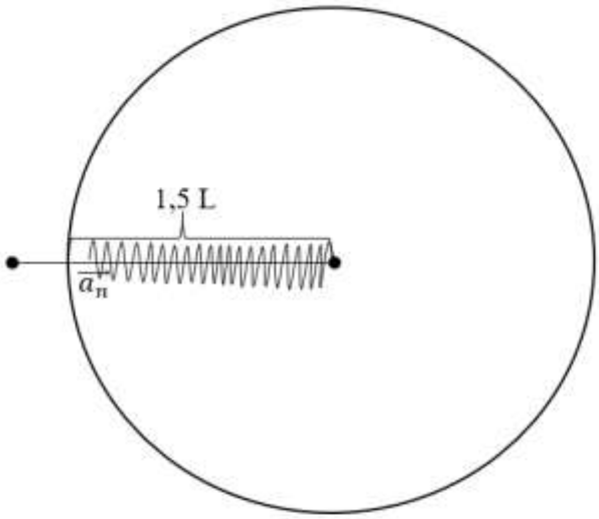
$N_1 = m\sin\varphi(\omega^2 L\cos\varphi - g);$

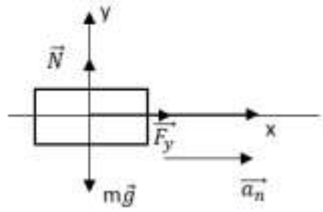
$T = m(\omega^2 L\sin^2\varphi + g\cos\varphi).$

Пример 2.26.

Груз массой m может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов. Груз соединяют с этим концом стержня пружиной жесткостью k. При какой угловой скорости пружина растянется на 50% первоначальной длины?

$a = \omega^2 1.5l;$

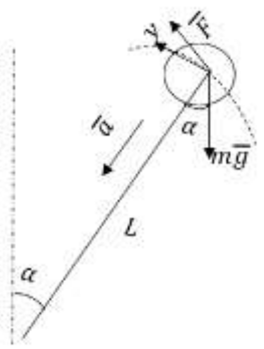




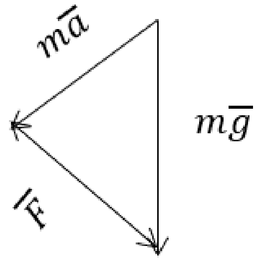
$m\vec{a}$= m$\vec{g}$+$\overrightarrow{F_y}$+$\vec{N}$;
ma=F_y;
0=N-mg;
$m\omega^2 1.5l = k\ 0.5l;$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}.$

Пример 2.27.

Груз массой m вращают на стержне длиной L в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Определить зависимость силы P, действующей на стержень со стороны груза, от угла α отклонения стержня от вертикали.



По IIIЗН сила, с которой груз действует на стержень равна по модулю силе с которой стержень действует на груз:



$F=P;$
$a = \omega^2 * L;$
$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F};$
$\overline{F} = m\overline{a} - m\overline{g};$
$O_x: ma = -F_x + mg * cos\,\alpha;$
$O_y: 0 = F_y - mg * sin\,\alpha;$
$F_x = mgcos\alpha - \mathrm{ma};$
$F_y = mgsin\alpha - \mathrm{ma};$
$F = \sqrt{(mgcos\alpha - \mathrm{m} * \omega^2 L)^2 + (mgsin\alpha)^2}.$

2.2.3. Сила гравитации

Две материальные точки притягиваются друг к другу с силами равными по модулю, противоположными по направлению, прямо пропорциональными массам тел и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними. Эти силы называются силами гравитации.

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

$$\gamma \equiv G$$

Если тело находится вблизи поверхности Земли, т.е. высота тела над поверхностью планеты много меньше радиуса Земли (Н<<$R_З$)

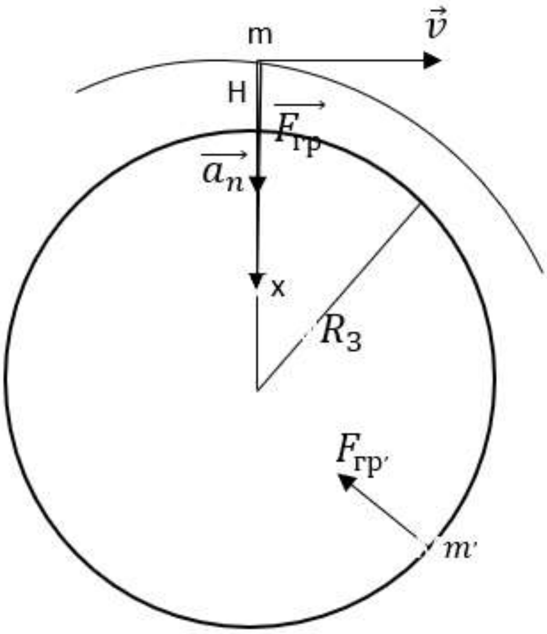
$$F_{\text{гр'}} = \gamma \frac{Mm}{(\text{Н} + R_З)^2} \approx \gamma \frac{Mm}{{R_З}^2} = m\left(\gamma \frac{M}{{R_З}^2}\right)$$

$$g = \gamma \frac{M}{{R_З}^2}$$

Таким образом сила тяжести является частным случаем силы гравитации для тел находящихся вблизи поверхности планеты.

2.2.4. Движение искусственных спутников планет (ИСП)

ИСП называется тело, движущееся вокруг планеты по круговой орбите под действием только лишь силы гравитации.



$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{гр}}$

$\frac{V^2}{{R_3}^2} = \gamma \frac{m}{R_3 + H}$;

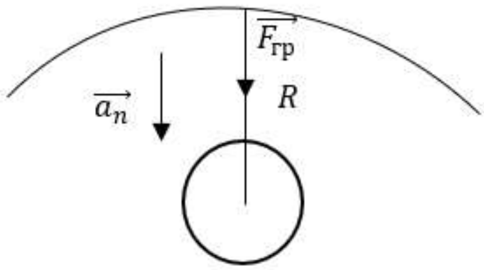
$V = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3 + H}}$.

Первая космическая скорость-минимальная скорость, обладая которой на поверхности планеты, тело может стать ее ИСП

$V_I = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3}} = \sqrt{gR_3} \approx 8\ \frac{км}{с}$

Пример 2.28.

Найти период T обращения планеты вокруг звезды массой M, если траекторией движения планеты является окружность радиуса R.



$m\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{F_{гр}}$;

$T=\frac{2\pi R}{V}$;

$a=\frac{v^2}{R}$;

Выразим ускорение через период и радиус:

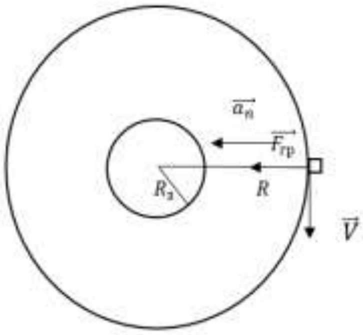
$a=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$;

$\frac{m4\pi^2R}{T^2} = \gamma\,\frac{mM}{R^2}$;

$T=\sqrt{\frac{4\pi^2R}{GM}}$.

Пример 2.29.

Вычислить радиус орбиты и линейную скорость спутника Земли, если известно, что спутник все время виден с поверхности Земли в зените одной и той же точки. В какой плоскости должна лежать траектория такого геостационарного спутника?



(Если спутник виден с поверхности Земли в зените одной и той же точки значит его орбита лежит в экваториальной плоскости, а период обращения равен периоду вращения Земли вокруг своей оси.)

Дано:
T
V - ?
R - ?

Выразим ускорение через период и радиус:

$a = \frac{4\pi^2R}{T^2}$;

Запишем второй закон Ньютона

$m\frac{4\pi^2R}{T^2} = G\,\frac{mM}{R^2}$;

Учтем, что на поверхности Земли сила тяжести равна силе гравитации, т.е.

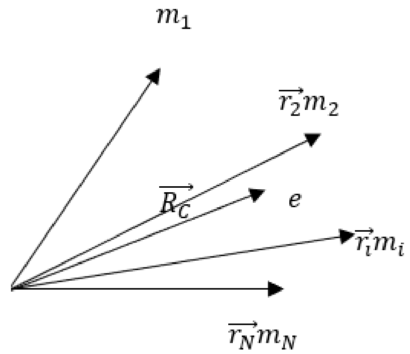
$g=G\frac{M}{{R_з}^2}$;

$\frac{4\pi^2R^3}{T^2} = g{R_з}^2$;

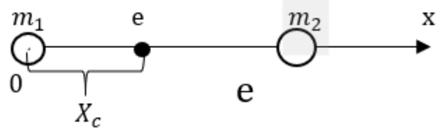
$R=\sqrt[3]{\frac{g{R_з}^2T^2}{4\pi^2}}$;

$V=\frac{2\pi R}{T}$.

2.2.5. Центр масс системы материальных точек



$$\vec{R_C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{M}$$



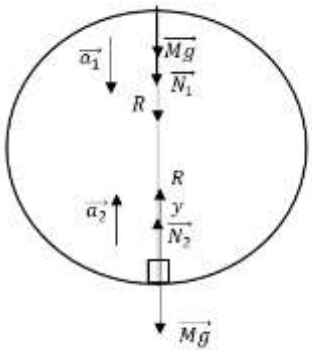
$$\vec{R_C}=\frac{m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2}$$

$$X_C=\frac{m_1 0+m_2 e}{m_1+m_2}=\frac{m_2 e}{m_1+m_2}$$

Двойная звезда-вращающаяся вокруг общего центра масс с одинаковым периодом

Пример 2.30.

Самолет делает «мертвую петлю» с радиусом *R*= 100 м и движется по не со скоростью *V*=280 км/ч. С какой силой *F* тело летчика массой *M* = 80 кг будет давить на сиденье самолета в верхней и нижней точках петли?



Запишем второй закон Ньютона для летчика в нижней и верхней точках «мертвой петли» и учтем, что движение равномерное по окружности:

$M\vec{a_2}=\vec{N_2}+\vec{Mg};$

$M\frac{v^2}{R} = N_2 - Mg;$

$M\vec{a_1}=\vec{N_1}+\vec{Mg};$

$M\frac{v^2}{R} = N_1 + Mg;$

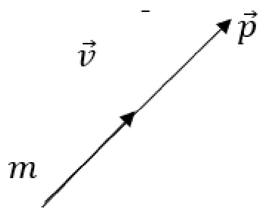
$N_2 = M\frac{v^2}{R} + Mg;$

$N_1 = M\frac{v^2}{R} - Mg;$

2.2.6. Импульс

Импульсом материальной точки называется векторная физическая величина равная произведению массы на скорость:

$\vec{p} = m\vec{v}$



Импульсом системы материальных точек называется векторная физическая величина равная геометрической сумме импульсов тел, входящих в систему:

$$\overrightarrow{P_{\text{сист}}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i}$$

Пример 2.31.

Рассмотрим одну МТ, движущуюся равноускорено (это можно сделать для любого тела, для этого достаточно взять настолько короткий временной интервал, чтобы на нем можно было считать ускорение постоянным).

$m\vec{a}=\vec{F}$

Здесь $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на тело.

$\vec{a} = const;$

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}-\overrightarrow{v_0}}{\Delta t};$

$m\frac{\vec{v}-\overrightarrow{v_0}}{\Delta t}=\vec{F};$

$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \vec{F}\Delta t;$

$\vec{p} - \overrightarrow{p_0} = \vec{F}\Delta t;$

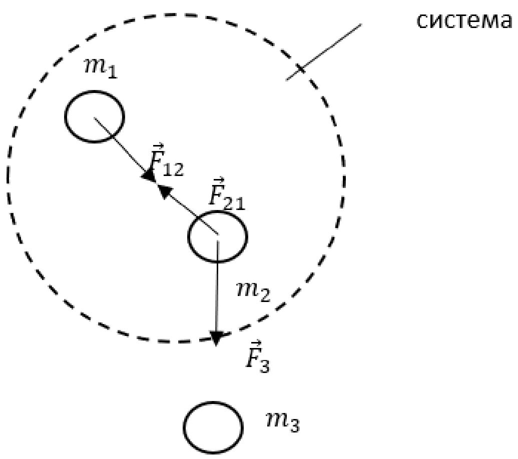
$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$

$\vec{F}\Delta t =$ импульс силы

Мы получили так называемую модифицированную форму записи второго закона Ньютона.

Видно, что импульс МТ будет сохраняться, если действие других тел скомпенсировано.

Рассмотрим систему МТ m_1 и m_2, а также тело m_3, не вошедшее в систему



$\vec{F}_{12}$=$-\vec{F}_{21}$ (III ЗН)
$\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{12}\Delta t$;
$\Delta\overrightarrow{p_2} = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_3)\,\Delta t = \vec{F}_{21}\Delta t + \vec{F}_3\Delta t$;
$\Delta\overrightarrow{p_{\text{сист}}} = \Delta\overrightarrow{p_2} + \Delta\overrightarrow{p_1} = \vec{F}_3\Delta t$;
$\Delta\overrightarrow{P_{\text{сист}}} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_{\text{внеш}}}\,\Delta t.$

$F_{\text{внеш}}$ – внешние силы – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не вошедших в систему (внешних тел).

$F_{\text{внутр}}$-внутренние силы, силы взаимодействия тел системы(всегда парные).

Система, на которую не действуют внешние силы называется замкнутой.

Глядя на последнее полученное соотношение можно сформулировать закон сохранения импульса системы материальных точек.

Введем определение Замкнутой системы – это система, на которую не действуют внешние тела.

2.2.7. Закон сохранения импульса системы материальных точек (ЗСИ)

Импульс замкнутой системы сохраняется.

$$\overrightarrow{P_{\text{нач}}} = \overrightarrow{P_{\text{кон}}}$$

Нетрудно сообразить, что составить замкнутую систему крайне сложно, поэтому для решения интересующих нас задач сформулируем следующие дополнения:

1) Система не замкнута, но $\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_{i\text{внеш}}}$=0, тогда импульс сохраняется

$$\overrightarrow{P_{\text{нач}}} = \overrightarrow{P_{\text{кон}}}$$

2) Система не замкнутая, $\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_{i\text{внеш}}} \neq 0$, но существует ось x, такая что за все время взаимодействия сумма внешних сил в проекции на эту ось равна нулю $\sum_{i=1}^{N} F_{i\text{внеш}x}$=0, тогда импульс сохраняется только в проекции на эту ось:

$$P_{\text{нач}x} = P_{\text{кон}x}$$

3) Удар или взрыв – это такое взаимодействие, время которого очень мало ($\Delta t \to 0$), при этом любая внешняя сила много меньше сил взаимодействия (внутренних сил)

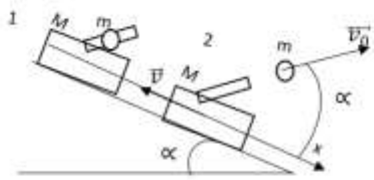
$$\overrightarrow{P_{\text{нач}}} = \overrightarrow{P_{\text{кон}}}$$

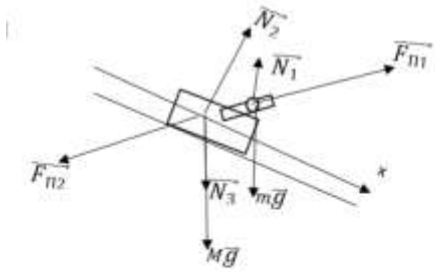
4) Если при ударе или взрыве хотя бы одно из тел системы действует внешняя сила нормальной реакции опоры(или ей аналогичная),то импульс сохраняется только в проекции на ось перпендикулярной этой силе

$$P_{\text{начх}} = P_{\text{конх}}$$

Пример 2.32.

Пушку массы M, снаряженную снарядом массы m, удерживают в покое на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Затем пушку отпускают и сразу производят выстрел. Снаряд вылетает в горизонтальном направлении с начальной скоростью V_0 относительно Земли. Определить: 1) скорость V пушки сразу после выстрела





Рассмотрим все силы, действующие на пушку и снаряд во время выстрела и сразу разделим их на внешние и внутренние ($F_{П1}$ – силы пороховых газов):

Внутренние: $F_{П1}, F_{П2}, N_1, N_2$

Внешние: N_2, Mg, mg

Выстрел из пушки, это взрыв, но при этом на пушку действует внешняя сила нормальной реакции опоры, которая соизмерима с огромными силами пороховых газов, поэтому импульс системы пушка, снаряд сохраняется только на ось, направленную вдоль наклонной плоскости, так как $x \perp N_2$*:*

$P_{\text{начх}} = P_{\text{конх}}$

$0 = mv_0 cos \propto - Mv;$

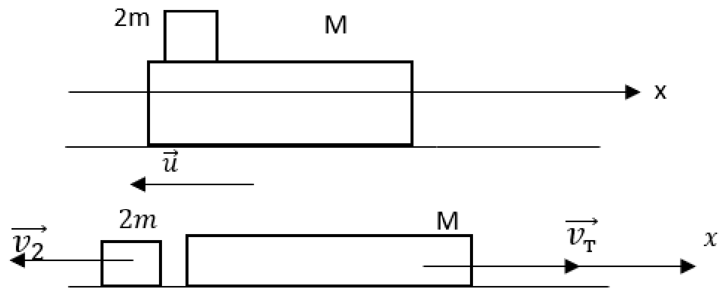
$v = \dfrac{mv_0 cos \propto}{M};$

Пример 2.33.

На краю покоящейся тележки массы M стоят два человека массы m каждый. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут одновременно с одной и той же горизонтальной скоростью U относительно тележки.

Дано:
m
M
v

$v_т$ - ?



Закон сохранения импульса выполняется только в инерциальной системе отсчета, скорость U –это скорость человека относительно неинерциальной СО – тележки. Поэтому вводим скорость человека относительно инерциальной СО – поверхности Земли $\overrightarrow{v_2}$, записываем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось, и одновременно записываем закон сложения скоростей:

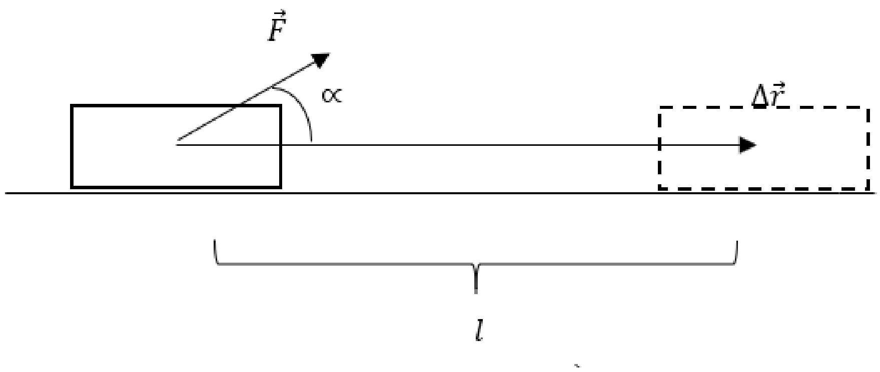
$P_{начx} = P_{конx};$

$$\begin{cases} 0 = -2mv_2 + Mv_т \\ -U = -v_2 - v_т \end{cases};$$

2.2.8. Работа

Работа – это скалярная алгебраическая физическая величина, являющаяся количественной мерой изменения механической энергии системы (это физический смысл понятия работы.

По определению работа есть скалярное произведение силы на перемещение.



$A_F = \vec{F}\Delta\vec{r}$=Flcos∝

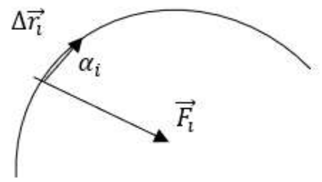
Ссправедливо только для малого перемещения:

1) сила F=const в любой траектории (модуль силы);

2) угол ∝=const на всей траектории;

3) траектория – прямая.

Если перемещение не малое, то вся траектория разбивается на столь короткие участки, в пределах каждого из которых условия малого перемещения выполняются. На каждом участке вычисляется так называемая элементарная работа и затем все они алгебраически суммируются

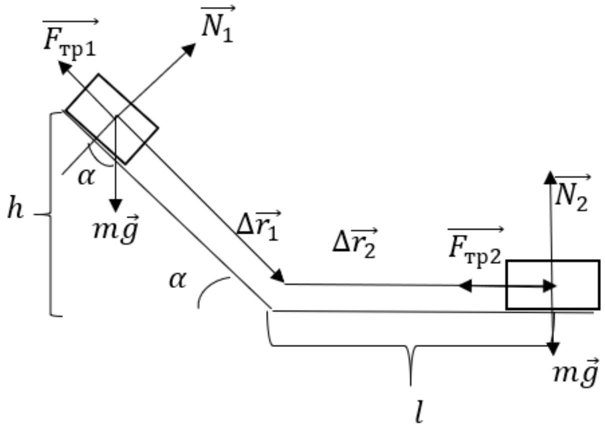


$\delta A_i = \vec{F_i}\Delta\vec{r_i}$=$F_i l_i \cos\alpha_i$

$A_{1\to 2} = \sum_{I=1}^{N} \delta A_i$

Пример 2.24.

Тело массы m удерживается на наклонной плоскости с углом наклона α, на высоте h. Наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную поверхность. Тело отпускают и оно соскальзывает с наклонной плоскости и проходит расстояние l по горизонтальной поверхности. Коэффициент трения μ. Рассчитать работу всех сил, действующих на тело.



Условия малого перемещения на всей траектории не выполняются, но если ее разбить на два участка $\Delta\vec{r_1}$ и $\Delta\vec{r_2}$, то на каждом из них условия малого перемещения для всех трех сил, действующих на тело выполняются. Начнем с расчета работы силы трения скольжения.

$A_{тр}$=$A_{тр1} + A_{тр2}$;

$A_{тр1} = \overrightarrow{F_{тр1}}\Delta\vec{r_1}$=$F_{тр1}\frac{h}{sin\alpha}\cos\pi$;

$F_{тр1} = \mu N_1$;

$N_1 = mg\cos\alpha$;

$A_{тр1} = \mu\, mg\cos\alpha\frac{h}{sin\alpha}(-1) = -\mu\, mghctg\alpha$;

$A_{тр2} = \overrightarrow{F_{тр2}}\Delta\vec{r_2}$=$F_{тр2}l cos\pi$=$\mu\, mgl(-1)$;

$A_{тр} = -\mu\, mghctg\alpha - \mu\, mgl.$;

$A_{mg} = A_{mg1} + A_{mg2}$;

$A_{mg1} = m\vec{g}\Delta\vec{r_1}$=mg$\frac{h}{sin\alpha}$cos($\frac{\pi}{2} - \alpha$)=mgh;

A_{mg2}= $m\vec{g}\Delta\vec{r_2}$=mgl cos$\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

$A_{mg} = mgh.;$
$A_N = A_{N1} + A_{N2};$
$A_{N1} = \overrightarrow{N_1}\Delta\overrightarrow{r_1}$=mg $\cos\alpha \frac{h}{sin\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
$A_{N2} = \overrightarrow{N_2}\Delta\overrightarrow{r_2} = 0.$
$A_{тр} = -\mu\, mgh(ctg\alpha + \, l).$
$A_{mg} = mgh.$
$A_N = 0.$

2.2.9. Теорема о кинетической энергии

Пусть МТ движется прямолинейно равноускорено

$m\vec{a}=\vec{F}$

Спроецируем на ось, совпадающую с направлением движения.

$ma=F$

Запишем законы равноускоренного прямолинейного движения

$$\begin{cases} a = const \\ v = v_0 + at \\ S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{cases};$$

t=$\frac{v-v_0}{a}$;

$S=\frac{v^2-{v_0}^2}{2a};$

$a=\frac{v^2-{v_0}^2}{2S};$

$m\frac{v^2-{v_0}^2}{2S} = F;$

$m\frac{v^2}{2}$-$m\frac{{v_0}^2}{2}=FS;$

Видим, что справа от знака равно стоит суммарная работа всех сил, действующая на пути S. Размерность работы – Дж, значит слева от знака рано стоит приращение величины, имеющей размерность Дж.

Таким образом введем понятие <u>кинетической энергии МТ</u>

$T= \frac{mv^2}{2};$

Получилось, что:

$T_{кон} - T_{нач}=А_{всех};$

$\Delta Т = А_{всех};$

Приращение кинетической энергии МТ равно работе всех сил, действующих на нее.

Кинетическая энергия системы МТ:

$T_{сист} = \sum Т_i;$

Пусть у нас есть система МТ, тогда для каждой из них можно написать:

$$\begin{cases} \Delta T_1 = A_{всех1} \\ \Delta T_2 = A_{всех2} \\ \quad \dots\dots\dots \\ \Delta T_i = A_{всехi} \\ \quad \dots\dots\dots \\ \Delta T_N = A_{всехN} \end{cases};$$

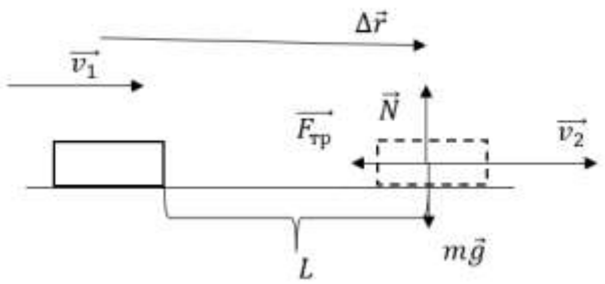
Сложим все уравнения получившейся системы:

$\Delta T_{сист} = A_{всех};$

Приращение кинетической энергии системы МТ равно суммарной работе всех сил, действующих на все тела системы. Это и есть теорема о Кинетической энергии.

Пример 2.25.

На пути бруска, скользящего по гладкой горизонтальной поверхности, находится шероховатая полоса ширины L, коэффициент трения о которую k. При какой начальной скорости брусок преодолеет этот участок? Брусок движется перпендикулярно полосе, длина бруска много меньше ширины полосы.



Применим теорему о кинетической энергии, при этом учтем, что на брусок в процессе движения по шероховатой полосе действует 3 силы

$\frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_{F_{тр}}$;

$A_{mg} = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mgLcos\frac{\pi}{2} = 0$, аналогично

$A_N = 0$;

$A_{F_{тр}} = \overrightarrow{F_{тр}}\Delta\vec{r} = \mu mgLcos\pi = -\mu mgL$;

$\frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = -\mu mgL$;

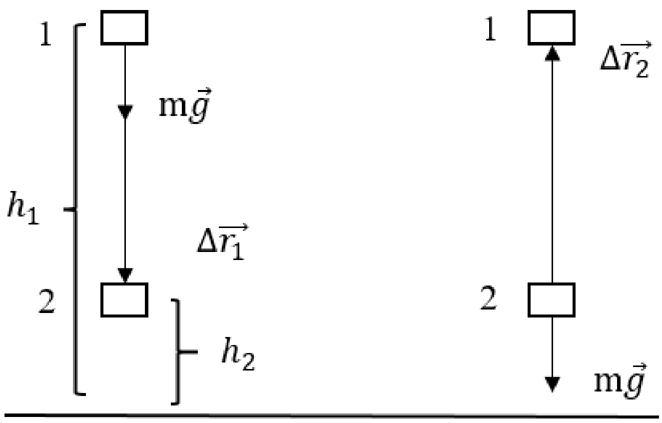
Теперь учтем, что условием преодоления шероховатой полосы, является то, что $v_2 \geq 0$, найдем v_1, при котором $v_2 = 0$.

$\frac{m{v_1}^2}{2} = \mu mgL$;

$v_1 = \sqrt{2\mu gL}$.

Консервативные силы: это силы, работа которая не зависит от формы траектории, а зависит <u>только</u> от начального и конечного положения тела.

Пример. Найдем работу силы тяжести при перемещении тела массы m из точки 1, которая находится на высоте h_1 в точку 2, которая находится на высоте h_2; а затем наоборот из точки 2 в точку 1



$A_{mg1\to2} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r_1} = mg \cdot (h_1 - h_2) \cdot \cos 0;$

$A_{mg1\to2} = mgh_1 - mgh_2;$

(Δ - приращение – из конечной величины вычитаем начальную

$-\Delta$ - убыль – из начальной величины вычитаем конечную)

$A_{mg2\to1} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r_1} = mg \cdot (h_1 - h_2) \cdot \cos\pi;$

$A_{mg2\to1} = mgh_2 - mgh_1;$

$A_{mg1\to2\to1} = A_{mg1\to2} + A_{mg2\to1} = 0;$

Видим, что работа силы тяжести равна разности двух величин, очевидно, имеющих размерность Дж, причем из начального значения этой величины, вычитаем конечное. Назовем эти величины потенциальной энергией U и так как сила тяжести типичная консервативная, делаем вывод:

Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии.

$A_{\text{конс}} = -\Delta U = U_{\text{нач}} - U_{\text{кон}}$

Заметим, что важна именно убыль, другими словами абсолютное значение потенциальной энергии вообще говоря не интересно, главное, чтобы все отсчитывались от одного, так называемого нулевого уровня – состояния системы при котором ее потенциальная энергия равна 0.

Перечислим известные консервативные силы, научимся вычислять потенциальную энергию и выбирать нулевой уровень.

Консервативная сила F	U	Рекомендуемый способ выбора нулевого уровня
1) mg	mgh h – высота над 0-м уровнем	По самому низкому положению тела в начале или в конце.
2) $F_{\text{гр}} = \gamma\frac{mM}{r^2}$	U = - $\gamma\frac{mM}{r}$	На бесконечном удалении от планеты.
3) $F_{\text{упр}} = kx$ x = | $l - l_0$ | x – деформация	U = + $\frac{kx^2}{2}$ x = | $l - L_0$ | L_0 – длина пружины, при которой её энергия = 0.	а) по длине нерастянутой пружины, если в начальный момент пружина сжата,

l – длина деформированной пружины l_0 – длина нерастяжимой пружины	(длина 0-го уровня)	а в конечный растянута или наоборот. б) по длине пружины в положении равновесия (а = 0), если и в нач. момент и в конечный пружина сжата или и в начальный и в конечный момент растянута.
4)Электростатическая		

2) Неконсервативные силы – силы работу которых придется считать через определение работы.

- трения скольжения
- силы внешнего воздействия
- сопротивления среды

3) Можно ввести еще один класс сил, которые никогда не совершают работу Никакие.

- N
- трения покоя
- силы, которые в любой точке траектории перпендикулярны скорости

2.2.10. Закон сохранения энергии

Для системы материальных точек запишем теорему о кинетической энергии

$\Delta T = A_{всех}$;

Учтем, что на тела системы могут действовать как консервативные, так и неконсервативные силы

$\Delta T = A_{конс} + A_{неконс}$;

$\Delta T = -\Delta U + A_{неконс}$;

$\Delta T + \Delta U = A_{неконс}$;

Получилось, что можно ввести новое понятие:

$E = T + U$ – полная механическая энергия

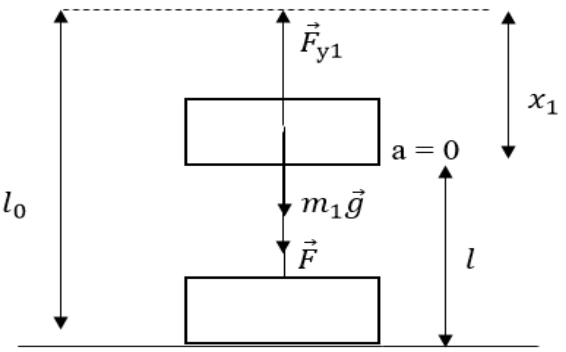
$\Delta E = A_{неконс}$;

$E_{кон} - E_{нач} = A_{неконс}$;

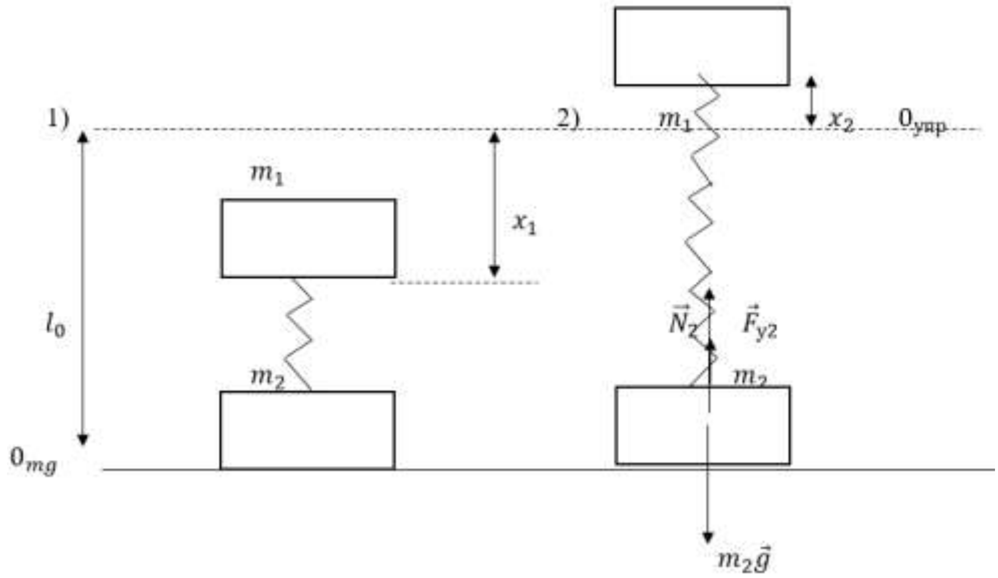
Приращение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил. Другими словами, если на тела системы на действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия сохраняется.

Пример 2.26.

Между грузами массами m_1 и m_2 находится соединенная с ними пружина. С какой минимальной силой нужно надавить на верхний груз, чтобы нижний груз оторвался от стола после прекращения действия силы?



Вначале тело m_1 находится в равновесии, т.е. его ускорение равно 0, запишем для него второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:



условие отрыва $N_2 = 0$;

условие минимума – второе тело только готово оторваться от стола, его скорость и, следовательно, ускорение равно 0: a = 0, запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$F_{у2} = m_2 g$

Классифицируем все силы, действующие на тела системы:

Консервативные	неконсервативные	никакие
$F_у, m_1 g, m_2 g$		N_2

Так как отсутствуют неконсервативные силы, то энергия в начале равна энергии в конце:

$E_1 = E_2$;

Нулевой уровень потенциальной энергии тяжести, выберем по положению второго тела, которое, кстати, не меняется, нулевой уровень упругой деформации выберем по длине нерастянутой пружины l_0 (смотри рисунок)

E_1 = 0 + $m_1 g(\ l_0 - x_1)$ + $\frac{k{x_1}^2}{2}$;

E_2 = 0 + $m_1 g(l_0 +\ x_2)$ + $\frac{k{x_2}^2}{2}$;

-$m_1 g x_1 + \ \frac{k{x_1}^2}{2} = \ m_1 g x_2 + \frac{k{x_2}^2}{2}$;

$kx_1 = F + \ m_1 g$;

$kx_2 = \ m_2 g$;

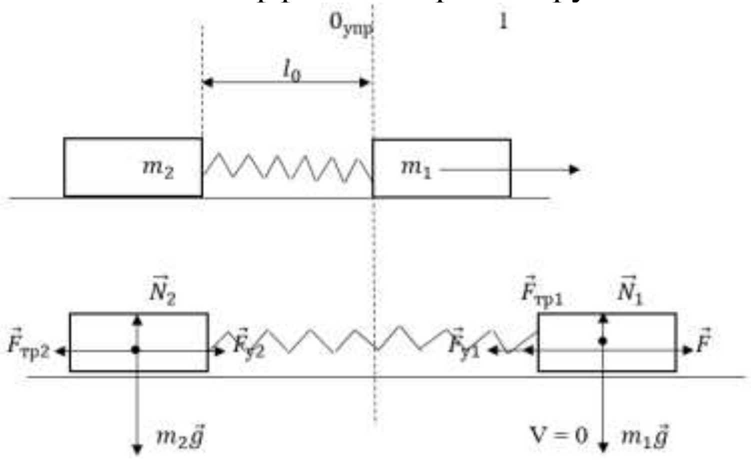
$x_1(\frac{kx_1}{2} - m_1 g)$ = $x_2(\frac{kx_2}{2} + m_1 g)k$;

(F + $m_1 g)\left(\frac{F - m_1 g}{2} - \ m_1 g\right) = \ m_2 g(\frac{m_2 g}{2} + \ m_1 g)$;

$$F = g\left(m_1 + \sqrt{4m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2}\right);$$

Пример 2.27.

На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной пружиной. Определить, какую наименьшую постоянную горизонтальную силу нужно приложить к бруску массой m_1, чтобы сдвинуть брусок массой m_2. Коэффициент трения грузов о плоскость k.



Условие начала скольжения второго тела: a = 0 ; $F_{тр2} = kN_2$

Консервативные	неконсервативные	никакие
$F_у$, mg	F , $F_{тр1}$(скольжения)	$F_{тр2}$ (покоя), N_1 , N_2

Так как на тела системы действуют неконсервативные силы, то приращение полной механической энергии системы, равно работе неконсервативных сил:

$E_2 - \ E_1 = A_F + \ A_{F_{тр1}}$

$E_1 = 0 + 0$;

$E_2 = 0 + \ \frac{æ{x_1}^2}{2}$;

$A_F = Fx_1 \cos 0° = F_{x_1}$;

$A_{F_{тр1}} = km_1 g x_1 \cos\pi = \ -km_1 g x_1$;

$\frac{æ{x_1}^2}{2} = Fx_1 - \ km_1 g x_1$;

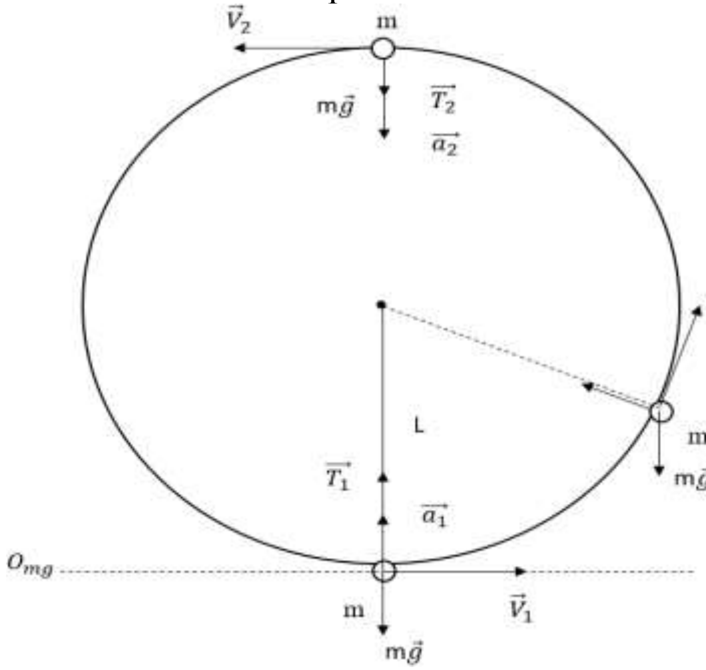
$\frac{æx_1}{2} = F - \ km_1g;$

$\frac{km_2g}{2} = F - \ km_1g;$

$$F = \frac{km_2g}{2} + \ km_1g.$$

Пример 2.28.

Шарику маятника массы m , подвешенному на невесомой, нерастяжимой нити, сообщили минимальную скорость, при которой он еще может описывать окружность в вертикальной плоскости. Какая сила действует на ось при прохождении маятником положений равновесия?



Энергия тела в нижней точке траектории равна энергии в верхней: $E_1 = E_2$

Нулевой уровень тяжести – по нижнему положению:

$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + 0,$

$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mg^2 2L;$

1) $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg^2 2L,$

Запишем второй закон Ньютона для шарика в нижней и верхней точках траектории, заметим, что в этих положениях ускорения шариков перпендикулярны скоростям, т.е. являются нормальными:

2) $\frac{mv_1^2}{L} = T_1 - mg;$

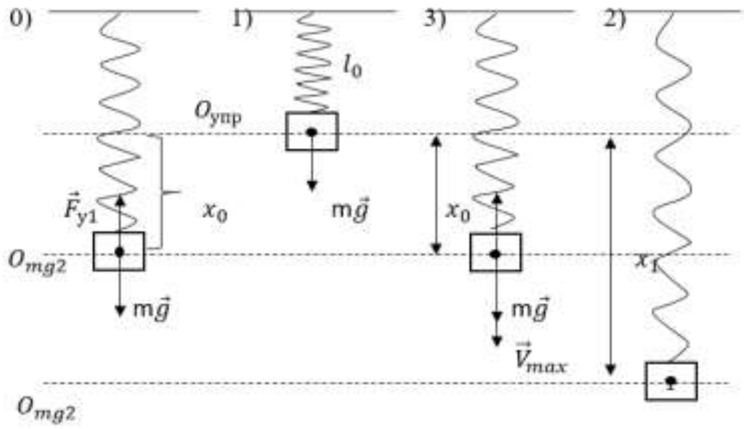
3) $\frac{mv_2^2}{L} = T_2 + mg.$

Из получившихся уравнений вытекает, что минимальная скорость V_1 будет соответствовать минимальной скорости V_2 (1 уравнение), которая получается при минимальном возможном значении силы натяжения нити $T_2 = 0$ в верхней точке.

$T_1 = 5mg + mg = 6mg.$

Пример 2.29.

Прикрепленный к вертикальной пружине груз медленно опускают до положения равновесия, причем пружина растягивается на величину x_0. На сколько растянется пружина, если тому же грузу предоставить возможность падать свободно с такого положения, при котором пружина не растянута? Какой максимальной скорости достигнет при этом груз? Масса груза m. Массой пружины пренебречь.



Сначала рассмотрим положение равновесия (рисунок 0)

mg = kx_0, здесь x_0 – деформация пружины в положении равновесия

1) В состоянии 2 пружина растянута максимально, при этом скорость тела равна 0, энергия системы сохраняется:

$E_1 = E_2,$

Нулевой уровень потенциальной энергии тяжести выберем по положению тела в состоянии 2: O_{mg2} на рисунке, нулевой уровень упругой деформации выберем по длине пружины в положении, соответсвующем длине нерастянутой пружины l_0:

$E_1 = 0 + mgx_1 + 0;$

$E_2 = 0 + 0 + \frac{kx_1{}^2}{2};$

$mgx_1 = \frac{kx_1{}^2}{2};$

$kx_0 = \frac{kx_1}{2};$

$2x_0 = x_1.$

2) Скорость максимальна в положении равновесия (положение равновесия: ускорение = 0 => равнодействующая сила равна 0.) рисунок 3 как раз соответсвует состоянию равновесия. При переходе из начального состояния 1 в состояние равновесия 3 энергия системы сохраняется:

$E_1 = E_3;$

Нулевой уровень потенциальной энергии тяжести выберем по положению тела в состоянии 3: O_{mg3} на рисунке, нулевой уровень упругой деформации выберем по длине пружины в положении, соответсвующем длине нерастянутой пружины l_0:

$E_1 = 0 + mgx_0 + 0;$

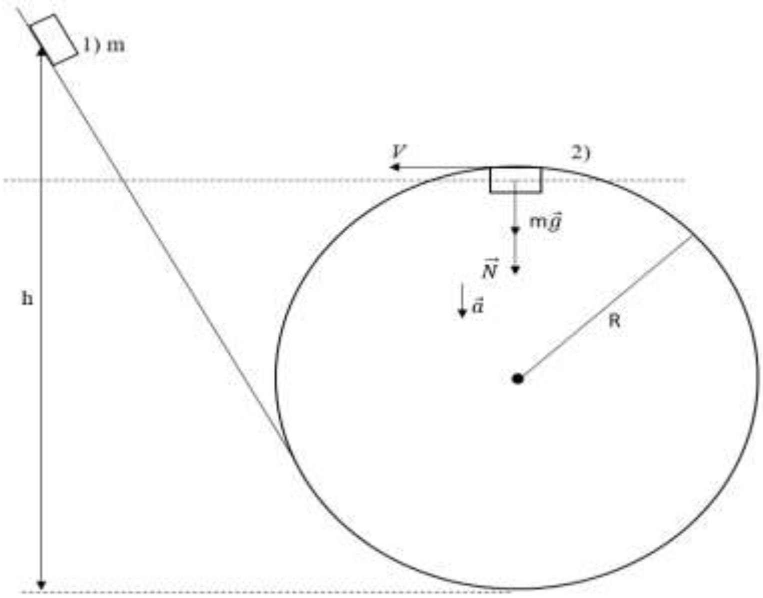
$E_3 = \frac{mV_{max}^2}{2} + 0 + \frac{kx_0{}^2}{2};$

$mgx_0 = \frac{mV_{max}^2}{2} + \frac{kx_0{}^2}{2};$

$mgx_0 = \frac{mV_{max}^2}{2} + \frac{mgx_0}{2};$

Пример 2.30.

Тележка скатывается по гладким рельсам, переходящим в вертикально расположенную окружность радиуса R. С какой минимальной высоты от нижней точки окружности должна скатиться тележка для того, чтобы сделать полный оборот?



Начальное состояние 1 – это положение тела на горке на высоте h, конечное – в верхней точке петли 2. Положение 2 является критическим для движения тела по окружности, в этой точке у тела есть скорость v, если бы ее не было, то тело двигалось бы равноускорено вниз с ускорением g.

$E_1 = E_2,$

Нулевой уровень потенциальной энергии силы тяжести, выберем по положению тела в точке 2:

$E_1 = 0 + mg(h - 2R);$

$E_2 = \frac{mV^2}{2} + 0;$

$mg(h-2R) = \frac{mV^2}{2};$

$g(h-2R) = \frac{V^2}{2};$

Запишем второй закон Ньютона для точки 2, и учтем, что ускорение направлено перпендикулярно скорости и, следовательно, является нормальным:

$\frac{mV^2}{R} = N + mg;$

и учтем, что минимальное значение V, соответствует минимальному возможному значению силы реакции опоры: N = 0

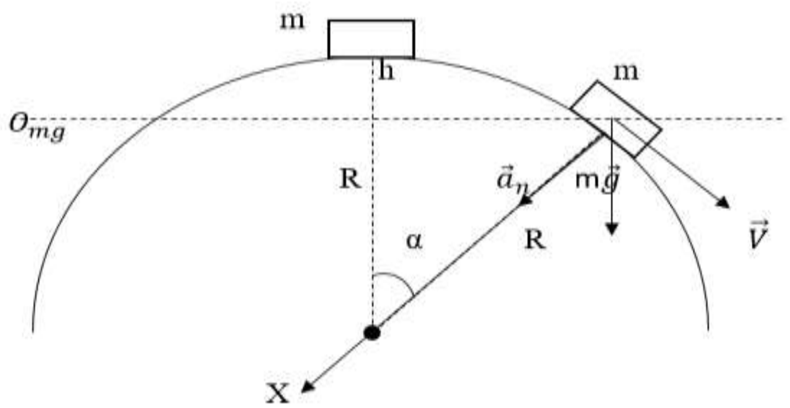
$V^2 = gR \ \rightarrow g(h-2R) = \frac{gR}{2};$

$h - 2R \ = \frac{R}{2};$

$h = \frac{5R}{2}.$

Пример 2.31.

Небольшое тело скользит с вершины гладкой сферы вниз. На какой высоте от вершины тело оторвется от поверхности? Радиус сферы R. Трением пренебречь.



$E_1 = \ E_2;$

$E_1 = 0 + mgh;$

$E_2 = \ \frac{mV^2}{2} + 0;$

$mgh = \ \frac{mV^2}{2};$

Запишем второй закон Ньютона для тела в момент отрыва, учтем, что N = 0:

m$\vec{a}$ = m$\vec{g}$;

Если мы спроецируем IIЗН на ось, направленную к центру окружности, то проекция ускорения на ось x будет равна нормальной составляющей ускорения:

X: ma_n= mgcos α;

$\frac{V^2}{R} = g\cos\alpha\,;$

Из геометрии получим:

$\cos\alpha = \frac{R-h}{R};$

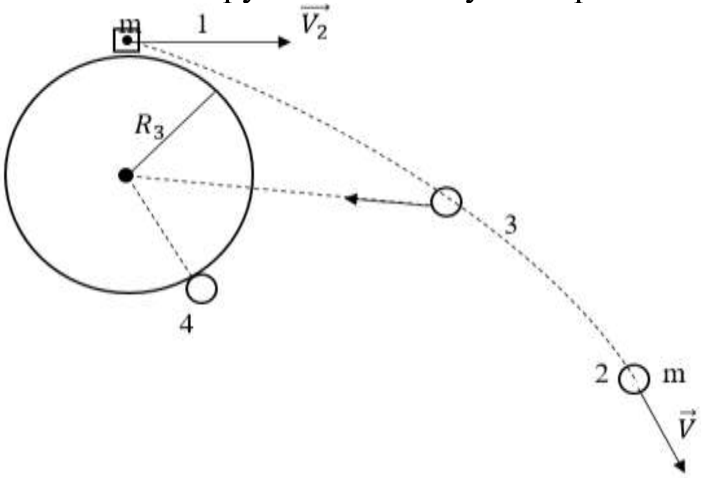
$V^2 = 2gh;$

$$\frac{V^2}{R} = g\frac{R-h}{R};$$

$$h = \frac{R}{3}.$$

Вторая космическая скорость – это минимальная скорость, обладая которой на поверхности планеты, тело может улететь от планеты бесконечно далеко.

Попробуем рассчитать вторую космическую скорость планеты Земля.



Запустим тело с поверхности Земли – 1 положение и пусть оно улетело бесконечно далеко – 2 положение. На тело в любой точке траектории действует только сила гравитации, поэтому энергия сохраняется:

$E_1 = E_2,$

Нулевой уровень потенциальной энергии гравитационного поля выбираем на бесконечном удалении от Земли, т.е. в точке 2:

$$E_1 = \frac{m{V_2}^2}{2} - G\frac{mM}{R_3};$$

$$E_2 = \frac{mV^2}{2} - 0;$$

$$\frac{m{V_2}^2}{2} - G\frac{mM}{R_3} = \frac{mV^2}{2};$$

Если мы хоти найти минимальная скорость, обладая которой на поверхности планеты, тело может улететь от планеты бесконечно далеко, то V = 0.

$$\frac{{V_2}^2}{2} = G\frac{M}{R_3};$$

$$V_2 = \sqrt{2\frac{GH}{R_3}};$$

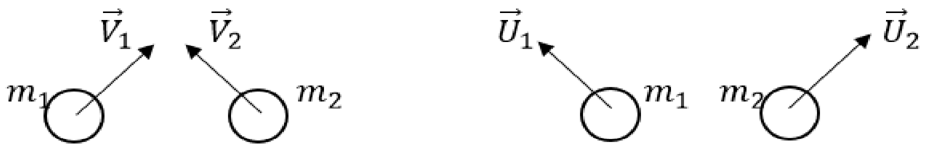
Вспомним, что сила тяжести, является частным случаем силы гравитации, если тело находится вблизи поверхности Земли, положим тело на поверхность Земли и приравняем силу тяжести к силе гравитации – положение 4.

$$mg = \frac{GmM}{{R_3}^2};$$

$$V_2 = \sqrt{2R_3 g} = \sqrt{2}V_1 \approx 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Удары.

1) Абсолютно упругий: Механическая энергия сохраняется.



ЗСИ:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2$$

ЗСМЭ:

$$\frac{m_1\vec{V}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1\vec{U}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{U}_2^{\,2}}{2}$$

2) Абсолютно неупругий: после удара тел, движущихся с одинаковыми скоростями (слипаются).

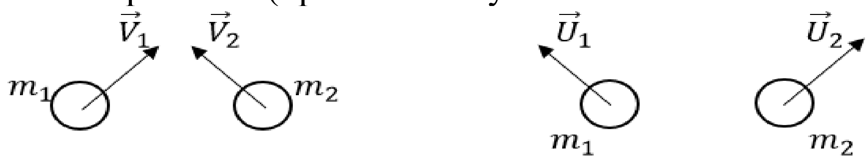
ЗСИ:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{U}$$

Энергия:

$$\frac{m_1\vec{V}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^{\,2}}{2} = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} + Q$$

3) Удар обыкновенный: механическая не сохраняется и тела движутся после удара с разными скоростями (при этом получают механические повреждения):



ЗСИ:

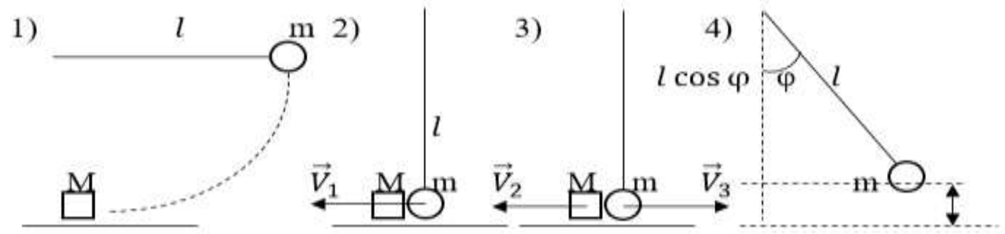
$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2$$

Энергия:

$$\frac{m_1\vec{V}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1\vec{U}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{U}_2^{\,2}}{2} + Q$$

Пример 2.32.

Шарик массой m, подвешенный на невесомой нити, отводят в сторону так, что нить располагается горизонтально, затем шарик отпускают. В нижнем положении шарик сталкивается абсолютно упруго с шайбой и отскакивает так, что нить отклоняется на угол φ. Найти массу шайбы.



Выберем следующие состояния: 1- начальное, 2 – за мгновение до удара, 3 – сразу после удара, 4 – шарик отклонился на угол φ. При переходе из состояния 1 в 2 сохраняется энергия шарика, с шайбой при этом ничего не происходит, поэтому ее нет смысла рассматривать, 2-3 – абсолютно упругий удар, сохраняются и импульс и энергия системы шайба и шар, и наконец 3-4 сохраняется энергия только шара. Схематически это можно изобразить следующим образом:

1→ 2 система m $E_1 = E_2$

2→ 3 система m, M $E_1{}' = E_2{}'$ $P_{2x} = P_{3x}$;

3→ 4 система m $E_3 = E_4$;

$mgl = \frac{mV_1^2}{2}$;

$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_3^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2}$;

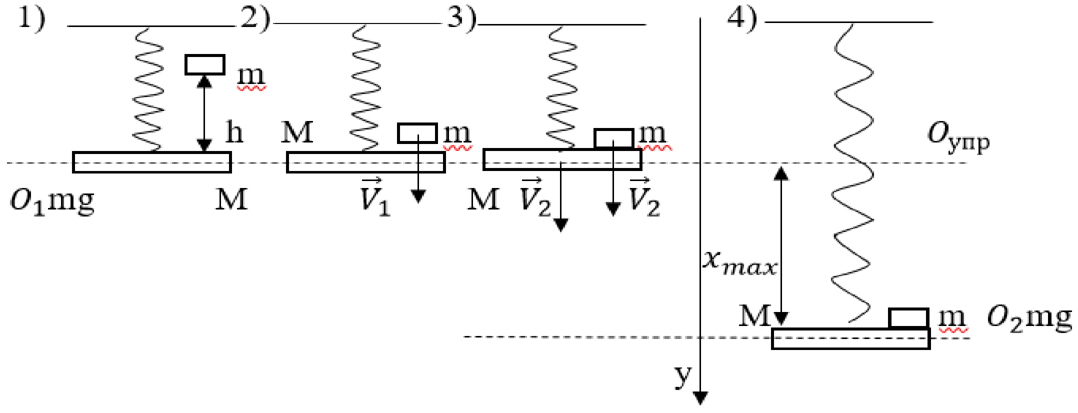
$mV_1 = MV_2 - mV_3$;

$\frac{mV_3^2}{2} = mgh = mgl(1 - \cos\varphi)$;

$$M = m\frac{\left(1 + \sqrt{1 - cos\varphi}\right)^2}{cos\varphi}.$$

Пример 2.33.

На пластину массы M, подвешенную на пружине жесткости k, с высоты h падает тело массы m и прилипает к ней. Определить максимальное растяжение пружины.



1→ 2 система m $E_1 = E_2$;

2→ 3 система m, M $P_{2y} = P_{3y}$;

3→ 4 система m, M, пружина $E_3 = E_4$;

$mgh = \frac{mV_1^2}{2}$;

$$mV_1 = (m+M)V_2;$$

$$\frac{(m+M)V_2^2}{2} + (m+M)gx_{max} = \frac{kx_{max}^2}{2};$$

$$x_{max} = \frac{(m+M) + \sqrt{(m+M)^2 g^2 + 2k\frac{m^2gh}{(m+M)}}}{k}.$$

2.3. СТАТИКА

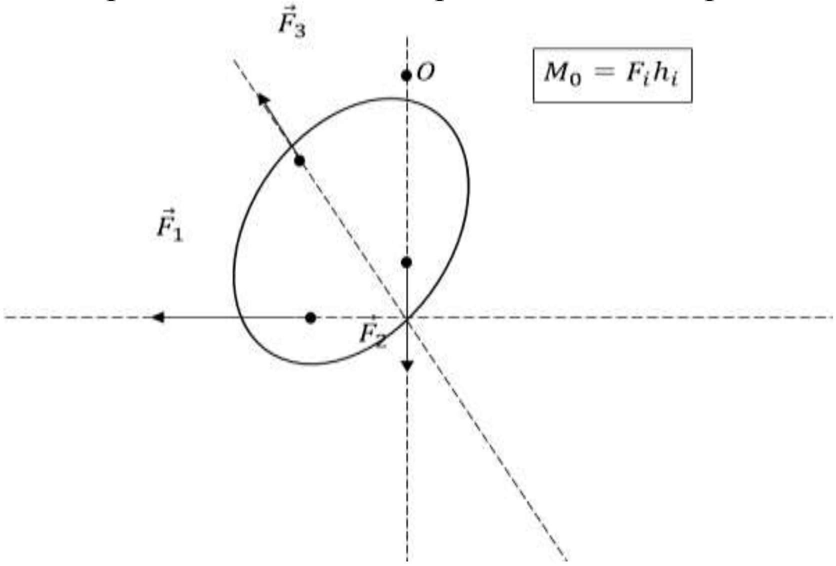
Состояние равновесия – состояние, при котором ускорение равно 0.

Условие статического равновесия МТ:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Если тело в условиях задачи может вращаться и при этом можно не учитывать его деформации, то оно является абсолютно твердым телом (АТТ)

Момент силы – это скалярная алгебраическая физическая величина, являющаяся количественной мерой вращающего действия силы. Момент силы относительно точки О по модулю равен произведению модуля силы на плечо силы – перпендикуляр, опущенный из точки О на линию действия силы (прямую проходящую через точку приложения силы, совпадающую с направлением силы), по знаку положительный, если сила вращает тело относительной точки по часовой стрелке и отрицательный, если против часовой стрелки.



Условия равновесия АТТ:

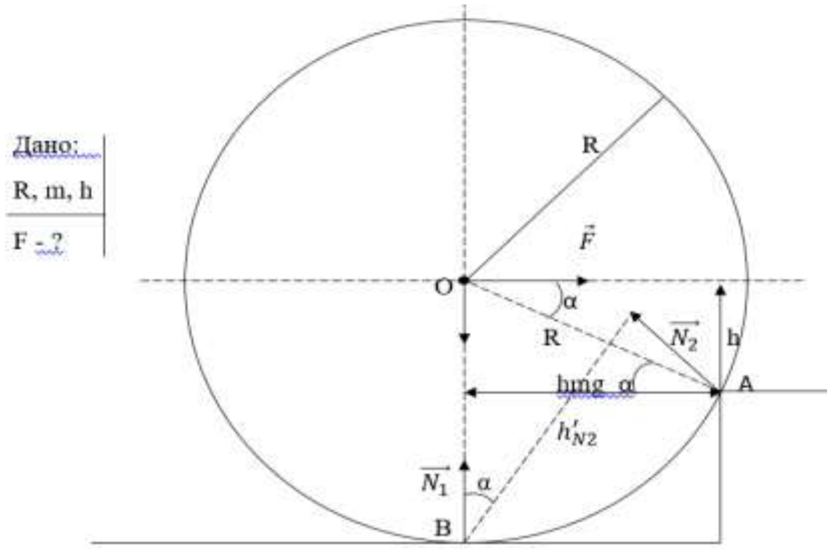
$$\sum \vec{F}_i = 0,$$

$$\sum M_i = 0.$$

Сумма всех сил, действующих на тело равна 0 и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки равна 0.

Пример 2.34.

Колесо радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты h. Какую силу в горизонтальном направлении надо приложить к оси колеса, чтобы оно смогло подняться на ступеньку? Трение не учитывать.



$\vec{F}$ + m$\vec{g}$ + $\overrightarrow{N_1}+\ \overrightarrow{N_2}$ = 0;

Условие подъёма на ступеньку – колесо прекращает взаимодействовать с горзонтальной опорой:

$N_1 = 0$

Мы не знаем, как направлена сила N_2 , но если в качестве точки относительно которой будем писать уравнение моментов возьмем точку А, то относительно нее момент силы N_2 равен 0, а моменты остальных сил достаточно легко рассчитать

А: $M_F - \ M_{mg} = 0$;

$M_F = Fh_F = F(R - h)$;

$M_{mg} = mgh_{mg} = mg\sqrt{R^2 - (R - h)^2}$;

$F(R - h) = mg\sqrt{R^2 - (R - h)^2}$;

$F = \dfrac{\text{mg}\sqrt{2Rh - h^2}}{(R - h)}$.

Попробуем найти $\overrightarrow{N_2}$ (об этом не спрашивается в задаче, но как нам кажется это интересно)

Напишем уравнение моментов относительно точки О, моменты всех сил кроме $\overrightarrow{N_2}$ относительно О равны 0, так как линии действия сил проходят через О:

M_{N_2}= 0,

$M_{N_2} = \ N_2 h_{N_2}$ => $h_{N_2} = 0$, =>N_2 направлена вдоль радиуса.

Найдем теперь модуль $\overrightarrow{N_2}$, для этого напишем уравнение моментов относительно точки В:

$M_F - M_{N_2} = 0$;

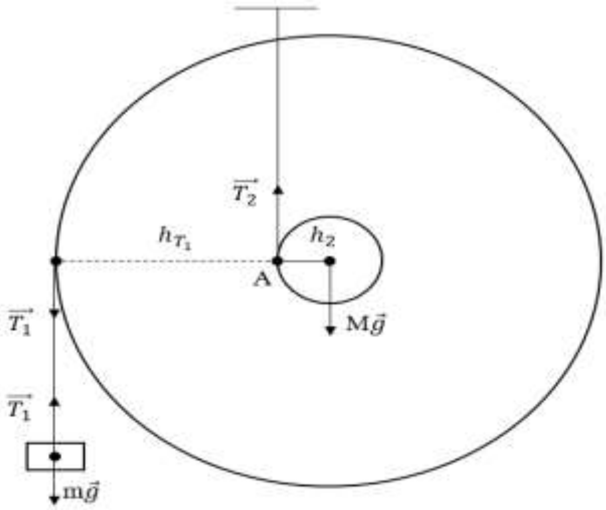
$M_F = FR$;

M_{N_2} = $N_2 h'_{N2} = N_2 R\cos\alpha = N_2\sqrt{2Rh - h^2}$;

$N_2 = \dfrac{FR}{\sqrt{2Rh - h^2}}$.

Пример 2.35.

Катушка висит на нити, намотанной по ее малому радиусу r. По большому радиусу катушки R тоже намотана нить, на конце которой висит груз. Какова масса груза, если система находится в равновесии? Масса катушки M.



Напишем условие статического равновесия материальной точки m:

mg = T_1

Далее напишем уравнение моментов для катушки, относительно точки A:

A: $-M_{T_1'} + M_{mg} = 0$;

$M_{T_1'} = T_1 h_{T_1} = mg(R - r)$;

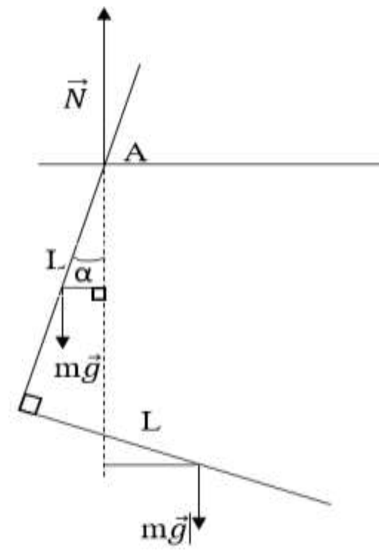
$M_{mg} = Mgh_2 = Mgr$;

Mgr – mg(R – r) = 0;

m = $\frac{Mr}{R-r}$.

Пример 2.36.

Тяжелый стержень согнут посередине под прямым углом и подвешен свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует верхняя половина стержня?



Напишем уравнение моментов для кочерги, представив, что на нее действуют две силы тяжести, приложенные к серединам стержней:

А: $-M_1 + M_2 = 0;$

$M_1 = mgh_1 = mg\frac{L}{2}\sin\alpha\,;$

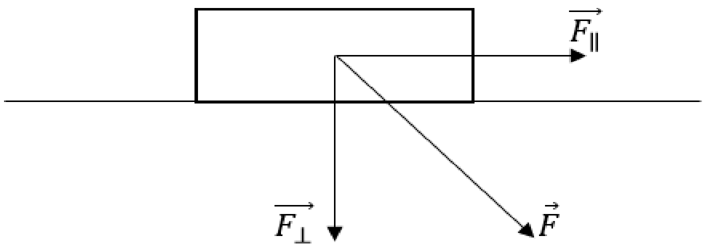
$M_2 = mgh_2 = mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha - L\sin\alpha\right);$

$mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha - L\sin\alpha\right) = mg\frac{L}{2}\sin\alpha\,;$

$\mathrm{t}g\,\alpha = \frac{1}{3};$

2.3.1. <u>Давление</u>

Пусть на тело действует сила F, направленная под углом к поверхности, с которой тело соприкасается, S – площадь соприкосновения тела с поверхностью, тогда давлением на поверхность называется отношение перпендикулярной поверхности составляющей силы к площади поверхности.



$\mathrm{P} = \frac{F_{\perp}}{S}$

Другими словами, если мы знаем, что на какую-либо поверхность оказывается давление, то это означает, что на нее действует сила, направленная перпендикулярно к ней и равная:

$$F_{\perp} = PS$$

2.4. ГИДРОСТАТИКА

2.4.1. Закон Паскаля

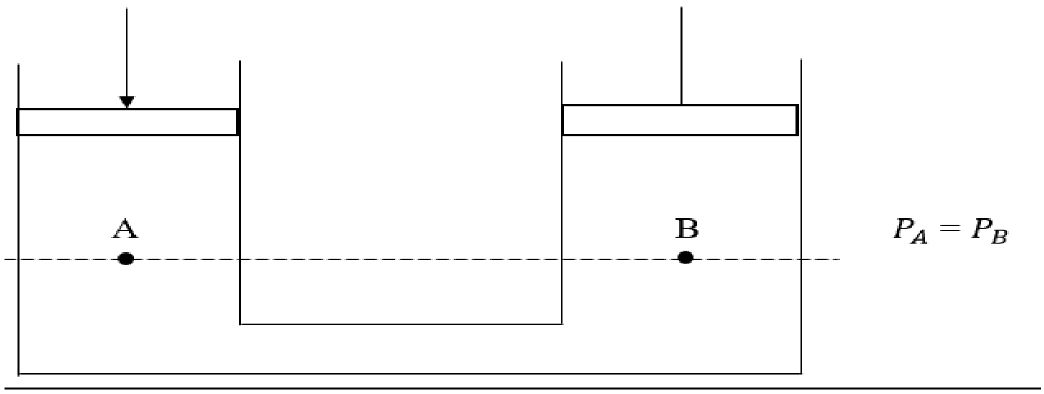
Давление, оказываемое на поверхность жидкости, передаётся жидкостью во все точки без изменения.

2.4.2. Закон гидростатического давления

На тело, погруженное в жидкость на глубину h, жидкость оказывает давление ρgh, ρ – плотность жидкости.

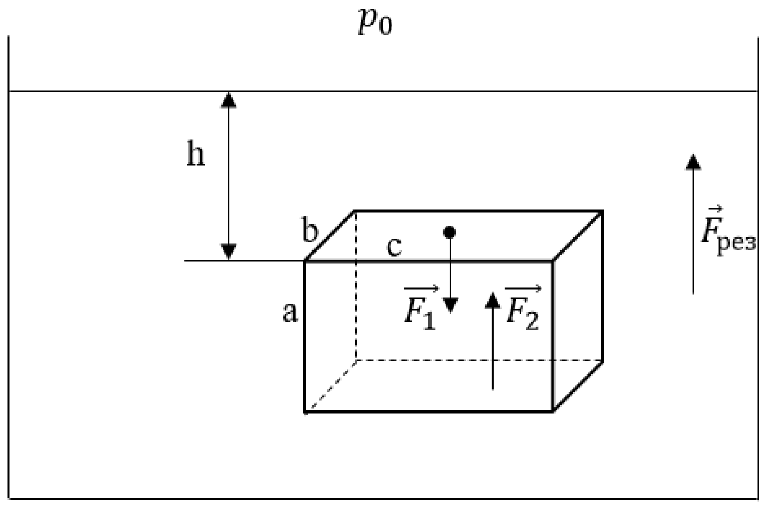
2.4.3. Закон сообщающихся сосудов

Давление в жидкости на одном и том же уровне одинаково.



2.4.4. Закон Архимеда

Пусть тело в виде прямоугольного параллелепипеда размерам a, b и c, погружено в жидкость на глубину h, смотри рисунок, видно, что сила, действующая со стороны жидкости на тело сверху меньше, чем сила, действующая на тело снизу, значит результирующая сила будет направлена вверх, она и называется силой Архимеда:



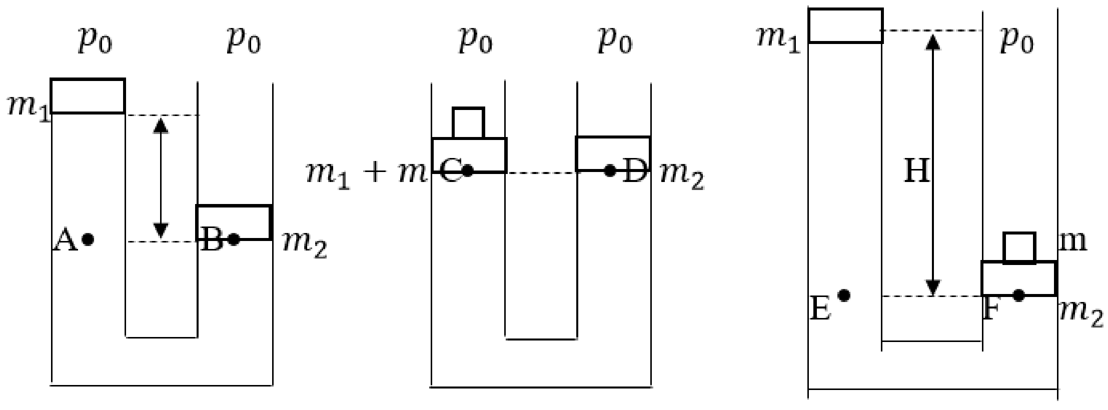
$F_1 = (p_0 + \rho g h)cb;$
$F_2 = (p_0 + \rho g(h + a))cb;$
$F_2 > F_1;$
$F_{рез} = F_2 - F_1 = \big(p_0 + \rho g(h + a)\big)cb - (p_0 + \rho g h)cb = \rho g a c b = \rho g V.$

$$F_A = \rho_ж g V$$

Сила Архимеда – сила, с которой жидкость действует на погруженное в неё тело.

Пример 2.37.

Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами m_1 и m_2. В положении равновесия первый поршень расположен выше второго на величину h. Когда на первый поршень поместили гирю массой m, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Как расположатся поршни, если гирю перенести на второй поршень?



Согласно закону сообщающихся совудов можем приравнять давления в точках находящихся на одном уровне:

$p_A = p_B \qquad p_C = p_D \qquad p_E = p_F$

$\left(p_0 + \dfrac{m_1 g}{S_1}\right) + \rho g h = p_0 + \dfrac{m_2 g}{S_2};$

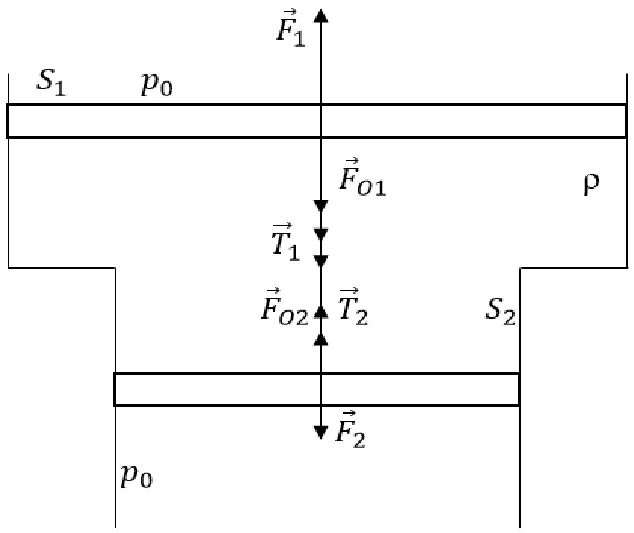
$$\frac{(m_1 + m)g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2};$$

$$\frac{m_1 g}{S_1} + \rho g H = \frac{(m_2 + m)g}{S_2};$$

$$H = h\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_2 m}.$$

Пример 2.38.

В вертикально расположенной трубе с сечениями S_1 и S_2 находятся два невесомых поршня. Поршни соединены тонкой нерастяжимой и невесомой проволокой длины L. Найти силу натяжения проволоки, если пространство между поршнями заполнено водой плотности ρ. Трением пренебречь. Труба открыта в атмосферу.



Запишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего поршня, здесь F_1 – сила, с которой сжатая жидкость действует на верхний поршень, F_{O1} и F_{O2} – сила с которой атмосферное давление действует на верхний и нижний поршни, T_1 и T_2 – сила натяжения нити, F_2 – сила, с которой жидкость действует на нижний поршень:

$$F_1 = F_{O1} + T_1;$$

$$F_2 = F_{O2} + T_2;$$

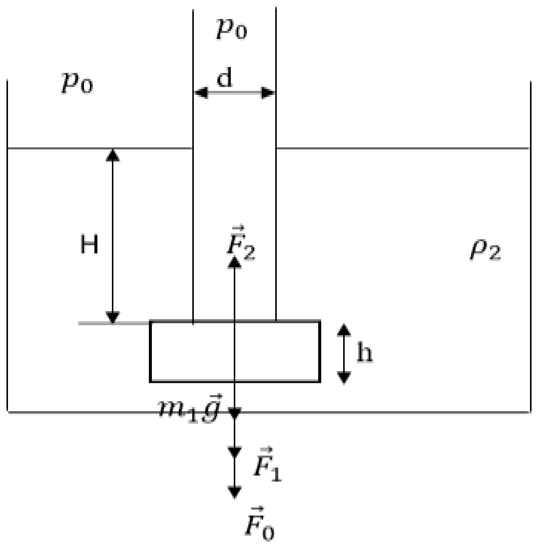
$$p_{ж1} S_1 = p_0 S_1 + T;$$

$$(p_{ж1} + \rho g L)\, S_2 = p_0 S_2 + T;$$

$$T = \frac{\rho g L S_1 S_2}{(S_1 + S_2)}.$$

Пример 2.39.

В бак с водой опущена длинная трубка диаметра d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщины h и диаметра D. Плотность материала диска ρ_1 больше плотности воды ρ_2. Трубку медленно поднимают вверх. На какой глубине диск оторвется от трубки?



Напишем второй закон Ньютона для шайбы, при условии, что она готова оторваться от трубы, т.е. между ними нет сил взаимодействия, F_1 – сила, с которой жидкость действует на верхнюю часть шайбы, F_2 - сила, с которой жидкость действует на нижнюю часть шайбы, F_0 - сила, с которой атмосферное давление действует на верхнюю часть шайбы, с которой соприкасается воздух:

$$F_2 = m_1 g + F_1 + F_0;$$

$$F_2 = p_2 S_2 = \left(p_0 + \rho_2 \mathrm{g}(\mathrm{H} + \mathrm{h})\right)\frac{\pi \mathrm{D}^2}{4};$$

$$F_1 = p_1 S_1 = (p_0 + \rho_2 \mathrm{gH})\frac{\pi}{4}(\mathrm{D}^2 - d^2);$$

$$F_0 = p_0 S_3 = p_0 \frac{\pi d^2}{4};$$

$$m_1 g = \rho_1 V g = \rho_1 \frac{\pi \mathrm{D}^2}{4} h g;$$

$$\left(p_0 + \rho_2 \mathrm{g}(\mathrm{H} + \mathrm{h})\right)\frac{\pi \mathrm{D}^2}{4} = \rho_1 \frac{\pi \mathrm{D}^2}{4} h g + (p_0 + \rho_2 \mathrm{gH})\frac{\pi}{4}(\mathrm{D}^2 - d^2) + p_0 \frac{\pi \mathrm{d}^2}{4};$$

$$\mathrm{H} = \frac{D^2(\rho_1 - \rho_2)}{d^2 \rho_2}.$$

3. ТЕРМОДИНАМИКА

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Термодинамика – раздел физики, который изучает термодинамические системы, например: вода в стакане, без учета самого стакана. Для описания термодинамических систем (ТДС) вводятся, так называемы макросостояния ТДС:

1) Температура [К];

2) Объём [$м^3$];

3) Давление [Па];

4) Масса [кг] (суммарная масса всех молекул вещества);

5) Молярная масса [г/моль] (масса строго определенного числа молекул и число это равно числу Авогадро N_A).

Это основные макростостояния ТДС, они однозначно определяют состояние любой ТДС. Кроме основных макросостояний, можно ввести дополнительные, при этом их можно выразить через основные:

$\rho = \frac{m}{V}$ [$кг/м^3$]- Плотность

$\nu = \frac{m}{\mu}$ [моль] - Количество вещества

Если ввести массу одной молекулы m_0, то получается, что количество вещества пропорционально количеству молекул:

$\nu = \frac{m_0 N}{m_0 N_A} = \frac{N}{N_A}$;

Идеальный газ (ИГ)

- это газ удовлетворяющий уравнению состояния ИГ – уравнению Менделеева-Клайперона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

В уравнении Менделева-Клайперона одновременно присутствуют 5 параметров (макросостояний), которые могут меняться, поэтому пользоваться и не очень удобно. Можно попробовать упростить:

1) Система замкнута (количество молекул не меняется), $\nu = \frac{m}{\mu} = const$

$$\frac{pV}{T} = const$$

2) Система замкнута и одновременно остается постоянной температура – Изотермический процесс: $\frac{m}{\mu} = const, T = const$;

$$pV = const$$

3) Система замкнута и одновременно остается постоянным давление – Изобарический процесс: $\frac{m}{\mu} = const, p = const$;

$$\frac{V}{T} = const$$

4) Система замкнута и одновременно остается постоянным давление – Изохорический процесс: $\frac{m}{\mu} = const, V = const$;

$$\frac{p}{T} = const$$

Парциальное давление – это давление, которое оказывал бы на стенки сосуда компонент смеси, если бы он оказался в том же сосуде при тех же условиях, но один.

3.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

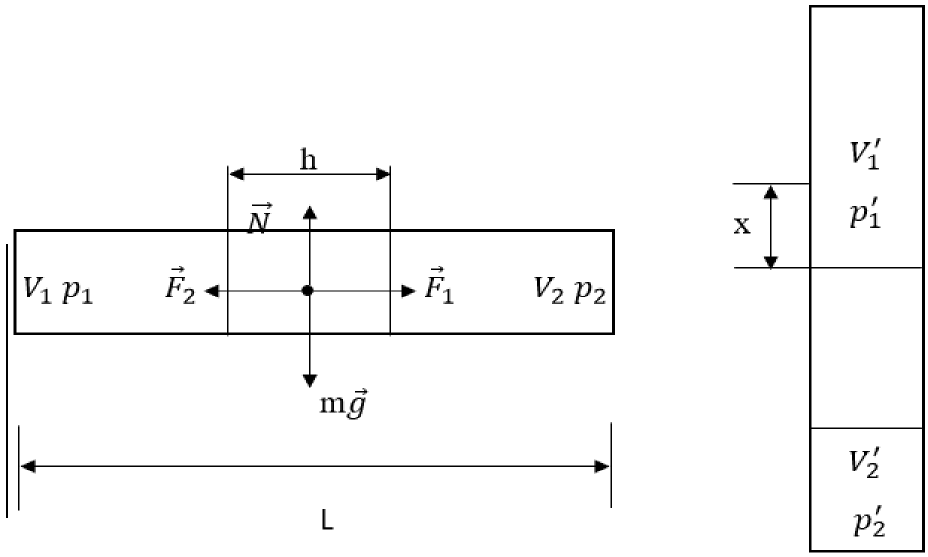
3.2.1. Закон Дальтона

Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений компонентов смеси

$$p_{\text{смеси}} = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

Пример 3.1.

Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длины *L*= 1 м находится столбик ртути длины *Y*= 20 см, если трубку поставить вертикально, столбик сместится на *x* = 10 см. До какого давления была откачана трубка? Плотность ртути ρ= 13,6 г/см^3.Температуру считать неизменной



У нас имеются 2 герметичные ТДС, с каждой происходит одно превращение при постоянной температуре, запишем для каждой из них по уравнению перехода из одного состояния в другое:

$p_1V_1 = p_1'V_1'$;

$p_2V_2 = p_2'V_2'$;

Получилось два уравнения с восемью неизвестными. Дополнительные уравнения получим сначала из геометрии:

$V_1 = S\frac{L-H}{2}$;

$V_2 = S\frac{L-H}{2}$;

$V_1' = S\left(\frac{L-H}{2} + x\right)$;

$V_2' = S\left(\frac{L-H}{2} - x\right)$.

Из условия статического равновесия столбика ртути на первом рисунке, получаем:

$p_1 = p_2 = p$;

Столбик ртути на втором рисунке тоже находится в равновесии, приравняем давление, оказываемое на нижнюю точку столбика снизу и сверху:

$p_2' = p_1' + \rho gh$;

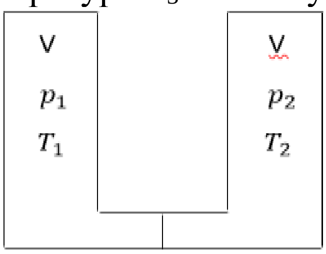
$p\frac{L-H}{2} = p_1'\left(\frac{L-H}{2} + x\right)$;

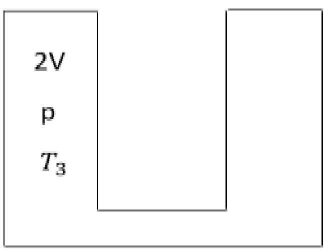
$p\frac{L-H}{2} = (p_1' + \rho gh)\left(\frac{L-H}{2} - x\right)$;

$p = \frac{\rho g H(L-H+2x)}{(L-H)4x}$.

Пример 3.2.

В двух одинаковых сосудах находятся водород и аргон. Давление и температура водорода равны P_1 и T_1, аргона - P_2 и T_2. Сосуды соединили между собой тонкой трубкой и поместили в резервуар, в котором поддерживается постоянная температура T_3. Найти установившееся давление в сосудах.





Запишем закон Дальтона, при этом учтем, что p_1 и p_2 не являются парциальными давлениями, чтобы найти парциальные давления первого и второго компонентов смеси, каждый из них должен перейти в состояние с температурой T_3 и объемом 2V:

$p = p_1' + p_2'$;

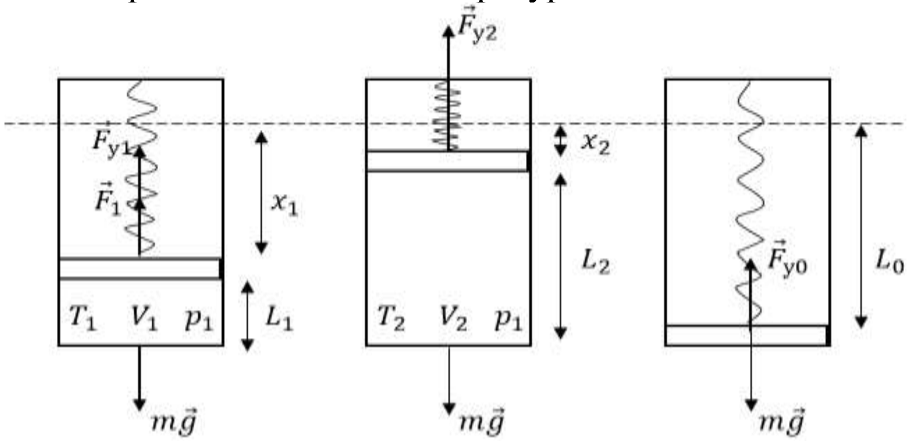
$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{2Vp_1'}{T_3}$;

$\frac{p_2 V}{T_2} = \frac{2Vp_2'}{T_3}$;

$$p = \frac{p_1 T_3}{2T_1} + \frac{p_2 T_3}{2T_2};$$

Пример 3.3.

В закрытом откачанном цилиндре подвешен на пружине поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. В пространство под поршнем вводится некоторое количество газа. При температуре газа T_1 поршень поднят на расстояние L_1 от дна цилиндра. Определить положение поршня в цилиндре после нагревания газа до температуры T_2.



Сначала рассмотрим условие равновесия поршня, когда под ним нет газа (3 рисунок):

$kL_0 = mg$.

Затем запишем условие равновесия поршня, для газа при температуре T_1 и T_2:

$k(L_0 - L_1) + p_1 S = mg$,

$k(L_0 - L_2) + p_2 S = mg$.

Запишем уравнение перехода газа из первого состояния во второе:

$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$,

Учтем:

$V_1 = SL_1, V_2 = SL_2$.

Получим:

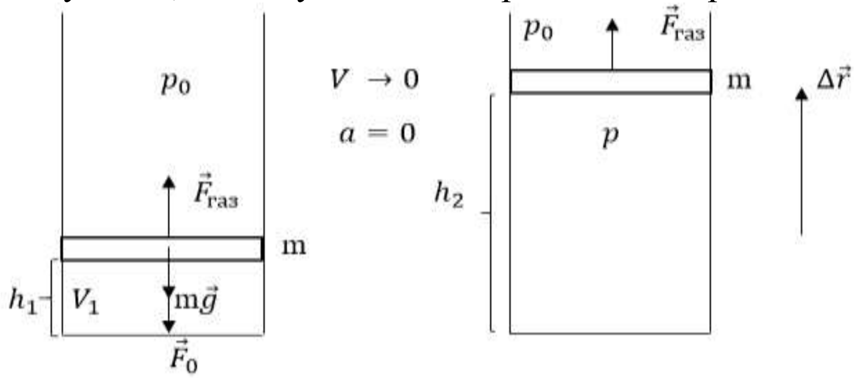
$\frac{kL_1^2}{T_1} = \frac{kL_2^2}{T_2}$;

$$L_2 = L_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

3.2.2. Работа идеального газа

Напомним физический смысл работы – это скалярная алгебраическая физическая величина, являющаяся количественной мерой изменения механической энергии тела.

Пример. Рассмотрим сосуд, открытый в атмосферу, закрытый герметичным поршнем, под которым находится ИГ. Газ медленно нагреваем, при этом поршень с минимальной скоростью поднимается вверх с высоты h_1 до высоты h_2. Найдем работу силы, действующей на поршень со стороны газа.



Во-первых, убедимся, что данный процесс адиабатический, так как скорость подъема минимальна, можно считать, что она не меняется, следовательно ускорение поршня равно 0.

$\overrightarrow{m\vec{a}} = \overrightarrow{F_{газ}} + m\vec{g} + \overrightarrow{F_0}$;

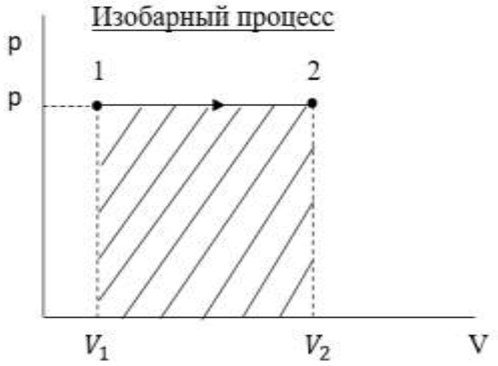
$0 = F_{газ} - mg - F_0$;

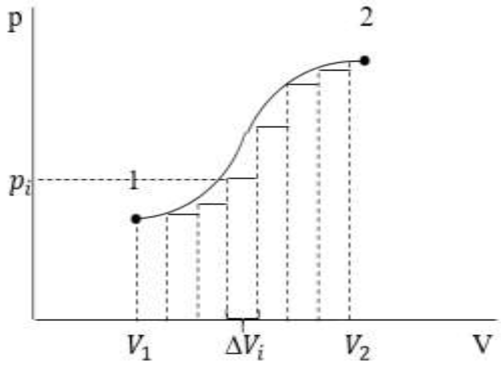
$pS = mg + p_0 S$;

$p = const$.

$A_{газа} = \vec{F}_{газ}\Delta\vec{r} = pS(h_2 - h_1)\cos 0 = p(h_2 S - h_1 S) = p(V_2 - V_1)$ – только для изобарного процесса.

Чтобы понять чему равна работа ИГ при произвольном процессе, сначала нарисуем изобарический процесс на диаграмме (P,V). Мы видим, что графической интерпретацией работы будет площадь под графиком. Теперь нарисуем произвольный процесс и аппроксимируем его последовательностью коротких изобар, видим, что работа ломаного процесса равна площади под ломаной линией. Теперь мысленно увеличим число столбиков например в 100 раз, тогда отличия между ломаной линией и гладкой кривой будут минимальными.





$\delta A_i = p_i \Delta V_i;$

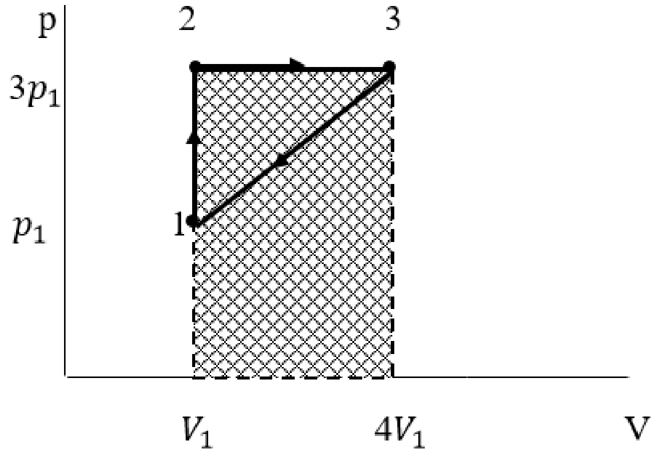
$A_{\text{дискр}} = \sum \delta A_i = \sum p_i \Delta V_i\,;$

Работа идеального газа – равна площади под графиком на диаграмме (p, V).

Если объём увеличивается, то A > 0, если уменьшается, то A < 0.

Пример 3.4.

Определить работу одного моля газа в процессе 1-2-3-1, изображенном на рисунке. В состояниях 2 и 3 давление втрое больше, чем в состоянии 1. В состоянии 3 объем вчетверо больше, чем в состоянии 1. Температура в состоянии 1 равна *T*.



$A = A_{12} + A_{23} + A_{31};$

$p_1 V_1 = RT_1;$

$A_{23} = 3V_1 3p_1 = 9p_1 V_1 = 9RT_1;$

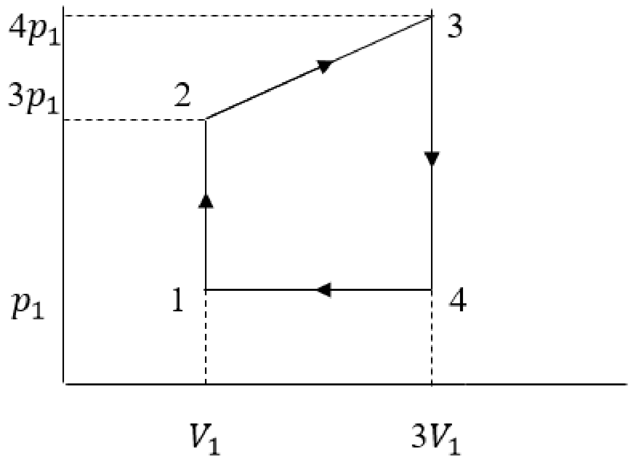
$A_{31} = (-1)0{,}5(p_1 + 3p_1)3V_1 = -6p_1 V_1 = -6RT_1;$

$A_{12} = 0;$

$A = 3RT_1.$

Пример 3.5.

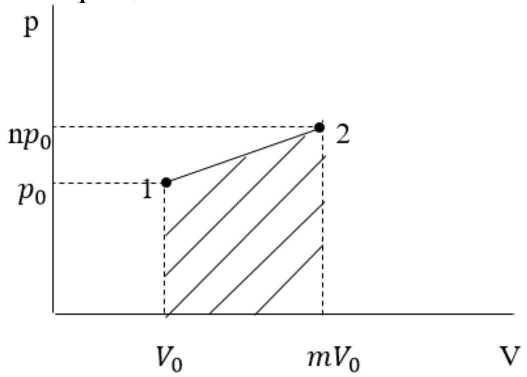
Определить работу одного моля газа в процессе 1-2-3-4-1, изображенном на рисунке. Давление в состоянии 2 втрое больше, а в состоянии 3 - вчетверо больше, чем в состояниях 1 и 4. Объем газа в состояниях 3 и 4 втрое больше объема в состояниях 1 и 2. Температура в состоянии 1 равна *T*.



$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41};$
$p_1V_1 = RT;$
$A_{23} = 0{,}5(4p_1 + 3p_1)2V_1 = 3{,}5p_1 2V_1 = 7p_1V_1 = 7RT;$
$A_{14} = -2V_1p_1 = -2RT;$
$A_{12} = 0;$
$A_{34} = 0;$
$A = 5RT.$

Пример 3.6.

Один моль идеального газа медленно нагревают так, что он переходит из состояния с параметрами P_0 и V_0 в состояние с параметрами nP_0 и mV_0. Как при этом зависит от объема температура газа, если зависимость давления газа от объема на диаграмме (P,V) изображается прямой линией? Найти работу, совершенную газом в этом процессе.



$A = 0{,}5(\mathrm{n}p_0 + p_0)(\,mV_0 - V_0)$

Для того, чтобы определить зависимость от объема температура газа, напишем уравнение прямой для зависимости давления газа от объема:

$p = kV + b,$

Для того, чтобы найти коэффициенты k и b, подставим координаты точек 1 и 2 в эту зависимость:

$p_0 = kV_0 + b,$
$np_0 = kmV_0 + \ b,$
$$k = \frac{p_0(n-1)}{V_0(m-1)},$$

$$b = \frac{p_0(m-n)}{(m-1)},$$

В уравнение Менделеева-Клайперона подставим p(V):

$$V(kV + b) = RT,$$

$$T = \frac{kV^2}{R} + \frac{Vb}{R},$$

$$T = \frac{p_0(n-1)}{V_0(m-1)}\frac{V^2}{R} + \frac{p_0(m-n)}{(m-1)}\frac{V}{R}.$$

3.2.3. Внутренняя энергия ТДС

$$U_{\text{ТДС}} = K_{XOM} + U_{MMB} + W_{BMB};$$

K_{XOM} - суммарная кинетическая энергия хаотического движения молекул:

W_{BMB} - энергия внутримолекулярного взаимодействия

U_{MMB} - энергия межмолекулярного взаимодействия

Внутренняя энергия идеального газа

$$U_{\text{ИГ}} = K_{XOM};$$

$$U_{\text{ИГ}} = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}pV;$$

i-количество степеней свободы -это минимальное количество независимых переменных, с помощью которых можно однозначно определить положение тела в пространстве.

i=3-одноатомный газ

i=5 – двухатомный газ (при нормальном условии)

i=7-двуатомный газ (при очень высокой температуре, выше 1000К)

Первое начало термодинамики

Q (количество теплоты) - это скалярная алгебраическая величина, являющаяся количественной мерой передачи энергии от одного тела к другому, или перехода энергии из одного вида в другой.

Q = $\Delta U + A_{\text{газа}}$

Количество тепла, переданное ТДС идет на приращение внутренней энергии ТДС и на совершение системой работы

Все три слагаемые в Первом начале ТД – алгебраические величины

A>0– объем увеличивается;

A<0– объем уменьшается;

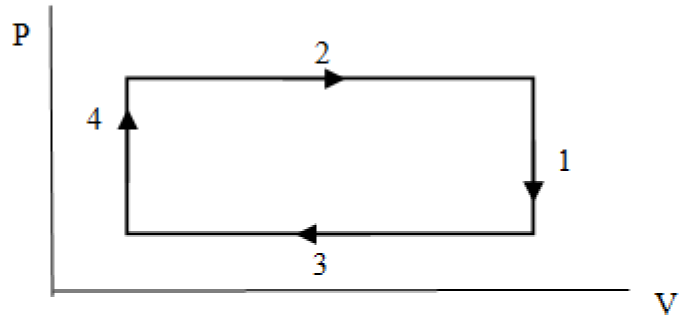
ΔU>0– температура увеличивается;

ΔU<0– температура уменьшается;

Q>0– тепло передаётся ТДС;

Q<0– тепло отбирается от ТДС.

Пример. Рассмотрим циклический процесс, состоящий из дух изохор и двух изобар. Оценить для каждого процесса знак работы, приращения внутренней энергии и количества тепла.

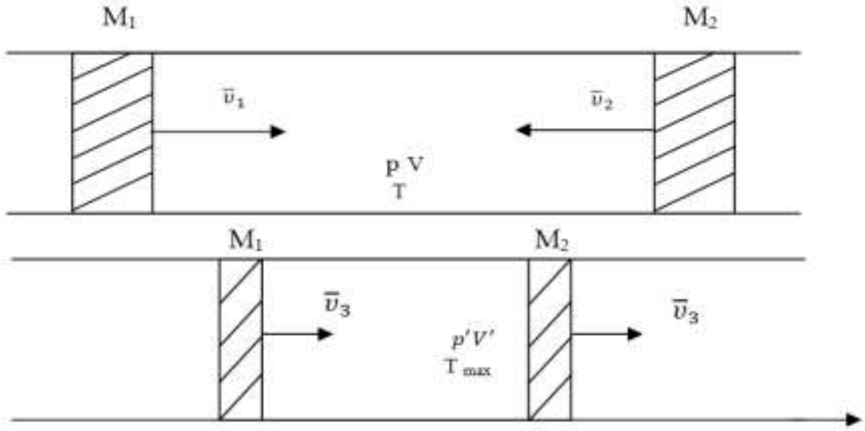


	A	∆ V	Q
1→2	>0	>0	>0
2→3	=0	<0	<0
3→4	<0	<0	<0
4→1	=0	>0	>0

Процесс без теплообмена с окружающей средой называется адиабатическим. Q=0.

Пример 3.7.

В расположенной в вакууме горизонтальной трубе могут без трения двигаться два поршня массами M_1 и M_2, между которыми содержится одноатомный идеальный газ в количестве ν моль при температуре T. Поршням толчком сообщают направленные навстречу друг другу скорости V_1 и V_2. Найти максимальную температуру газа $T_{макс}$. Масса газа мала по сравнению с массами поршней. Система теплоизолирована. Теплоемкостью трубы и поршней пренебречь.



Максимальная температура будет соответствовать минимальному объему газа и следовательно относительная скорость поршней в этот момент равна 0, значит скорости поршней относительно поверхности Земли равны.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось:

1)$M_1 v_1 - M_2 v_2 = (M_1 + M_2) v_3$;

Единственная сила, которая совершает работу это сила действующая на поршни со стороны газа, напишем теорему о кинетической энергии:$\Delta T = A_{газа}$;

2)$\frac{(M_1+M_2)v_3^2}{2} - \left\{\frac{M_1v_1^2}{2} + \frac{M_2v_2^2}{2}\right\} = A_{газа}$;

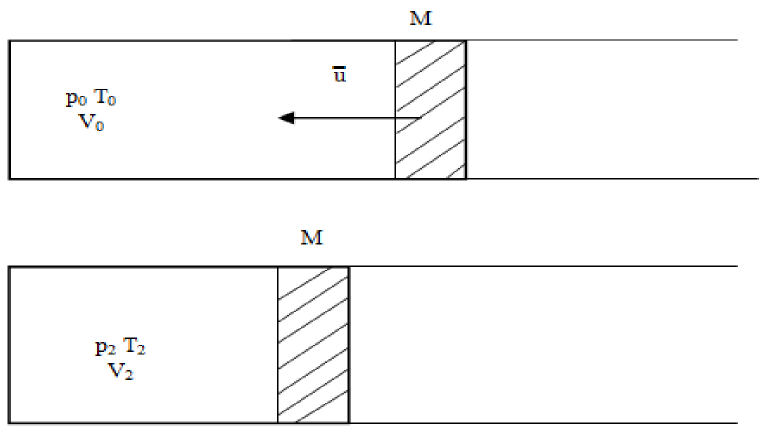
Запишем Iначало ТД для адиабатического процесса: $Q = \Delta U + A_{газа}$;

3) $0 = \frac{3}{2}\vartheta RT_{max} - \frac{3}{2}\vartheta RT + A_{газа}$;

$T_{max} = T - \frac{M_1M_2(v_1+v_2)^2}{3(M_1+M_2)\vartheta R}$.

Пример 3.8.

Поршень массы M, замыкающий объем V_0 одноатомного газа при давлении p_0 и температуре T_0, движется с горизонтальной скоростью u. Определите температуру газа при максимальном сжатии. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня и сосуда пренебречь.



Первое начало ТД для адиабатического процесса: $0 = \Delta U + A_{газа}$:

$0 = \frac{3}{2}\vartheta RT_2 - \frac{3}{2}\vartheta RT_0 + A_{газа}$;

Теорема о кинетической энергии

$\Delta T = A_{газа}$;

$0 - \frac{Mu^2}{2} = A_{газа}$;

$T_2 = T_0 + \frac{Mu^2}{3\vartheta R}$.

3.2.4. Теплоёмкость

Теплоёмкость – скалярная физическая величина, равная количеству теплоты, которое надо передать ТДС, чтобы увеличить её температуру на 1 K.

$$Q=C\cdot\Delta T$$

$$C=\frac{Q}{\Delta T}$$

Удельная теплоёмкость

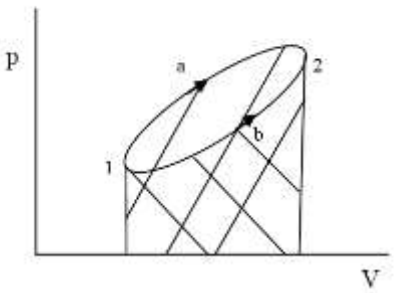
$$c=\frac{C}{m} = \frac{Q}{\Delta Tm} \rightarrow Q = cm\Delta T;$$

Молярная теплоемкость

$C_M = \frac{C}{\vartheta} = \frac{C}{m/\mu} = \mu \cdot c$

$Q = \vartheta C_m \Delta T$

Пример 3.9.



$\Delta T_{1\to a\to 2} = \Delta T_{1\to b\to 2}$;

$\Delta U_{1\to a\to 2} = \Delta U_{1\to b\to 2}$;

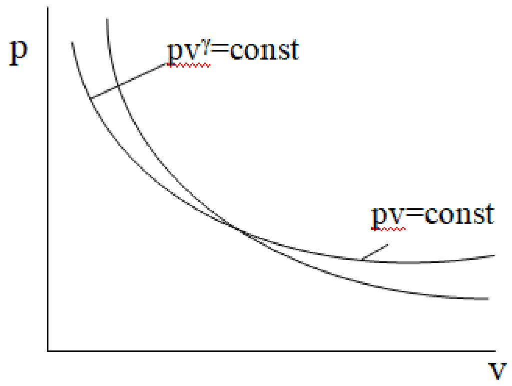
$A_{1\to a\to 2} > A_{1\to b\to 2}$;

$Q_{1\to a\to 2} > Q_{1\to b\to 2}$;

$C_{1\to a\to 2} > C_{1\to b\to 2}$;

Видно, что теплоемкость газа зависит от того по какому процессу происходит переход из начального состояния в конечное.

3.2.5. Уравнение адиабаты



pv^{γ}=const

γ– показатель адиабаты

Молярная теплоёмкость некоторых процессов

($\frac{m}{\mu}$= 1 моль)

1) Адиабатический Q=0

   $C_Q = \frac{Q}{\Delta T} = 0$;

2) Изотермический T=const, ΔT=0

$C_Q = \frac{Q}{\Delta T} = \infty;$

3) ИзохорическийV=const

$C_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + A}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{i}{2}\frac{R\Delta T}{\Delta T} = \frac{i}{2}R;$

$\Delta U = C_V \Delta T$

$U = C_V T$ - для одного моля

$U = \vartheta C_V T;$

$C_V = \frac{i}{2}R;$

4) Изобарическийp=const

$\mathrm{C_p} = \frac{\mathrm{Q}}{\Delta \mathrm{T}} = \frac{\Delta \mathrm{U} + \mathrm{A}}{\Delta \mathrm{T}} = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{A}{\Delta T} = C_V + \frac{p\Delta V}{\Delta T};$

$\mathrm{pV_1} = \mathrm{RT_1}$; $pV_2 = RT_2 \mathrm{p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)};$

$\mathrm{p\Delta V = R\Delta T};$

$\mathrm{C_p = C_V + \frac{R\Delta T}{\Delta T}};$

$\mathrm{C_p = C_V + R};$

$\mathrm{C_p = \frac{i+2}{2}R};$

Показатель адиабаты

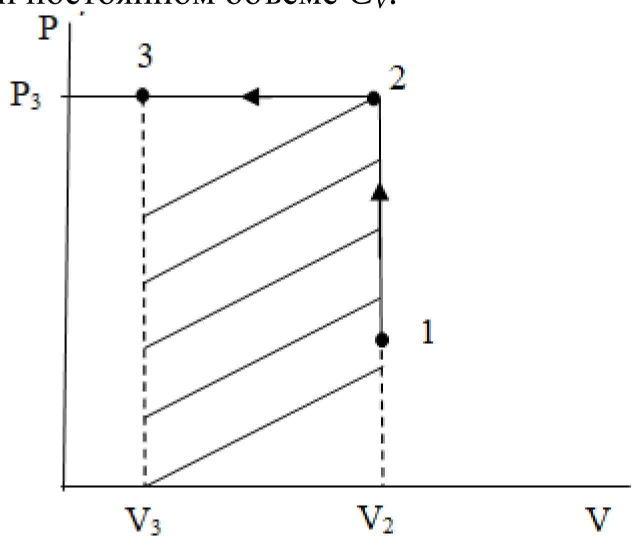
$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i};$

$3 \le i < \infty;$

$1 < \gamma \le \frac{5}{3};$

Пример 3.10.

Один моль идеального одноатомного газа переводят из состояния 1 в состояние 2 по изохоре, а затем в состояние 3 по изобаре. На изохоре газу сообщается такое количество теплоты Q, какое выделяется на изобаре. Найти конечную температуру газа, если начальная температура T_1, а молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V.

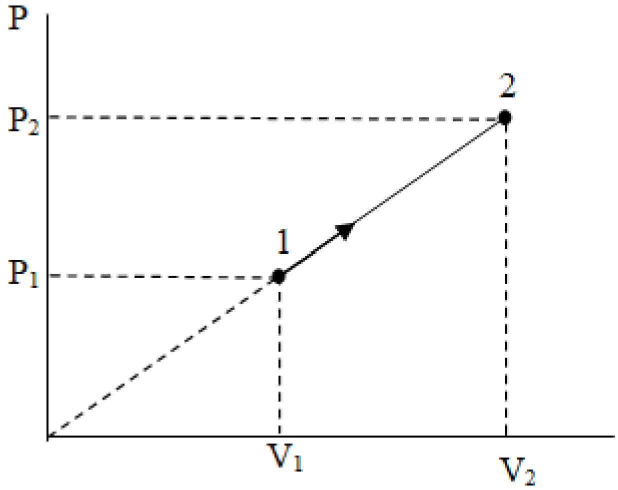


Процесс 1-2 – изохора с передачей тепла, значит идет с увеличением давления, процесс 2-3 – изобара с отбором тепла, значит объем уменьшается. Запишем первое начало ТД для каждого процесса, а также рассчитаем работу газа:

$Q = C_V(T_2 - T_1)$;
$-Q = C_V(T_3 - T_2) + A_{газа\,2\to3}$;
$A_{газа} = p_3(V_2 - V_3)\cdot(-1) = -p_3V_2 + p_3V_3 = -RT_2 + RT_3 = R(T_3 - T_2)$;
$$\begin{cases} Q = C_V(T_2 - T_1) \\ -Q = C_V(T_3 - T_2) + R(T_3 - T_2) \end{cases};$$
$T_3 = \frac{QR}{C_V(C_V+R)} + T_1$.

Пример 3.11.

Одноатомный идеальный газ расширяется в процессе *1–2*, при этом давление газа P пропорционально объему V: $P=\alpha V$, где α — неизвестный коэффициент пропорциональности. За весь процесс к газу было подведено количество теплоты, в 7 раз превышающее величину его внутренней энергии в начальном состоянии *1*. Во сколько раз увеличился объем газа?

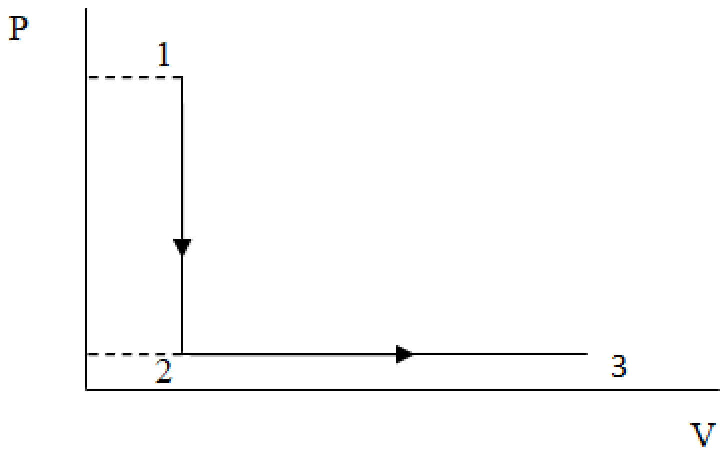


$Q = U_2 - U_1 + A_{газа}$;
$A_{газа} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\cdot(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\cdot\alpha(V_1 + V_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\cdot\alpha(V_2^2 - V_1^2)$;
$U_1 = \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}\alpha V_1^2$;
$U_2 = \frac{3}{2}p_2V_2 = \frac{3}{2}\alpha V_2^2$;
$7\cdot\frac{3}{2}\cdot\alpha\cdot V_1^2 = \frac{3}{2}\alpha V_2^2 - \frac{3}{2}\alpha V_1^2 + \frac{1}{2}\alpha(V_2^2 - V_1^2)$;
$21V_1^2 = 3V_2^2 - 3V_1^2 + V_2^2 - V_1^2$;
$21V_1^2 + 3V_1^2 + V_1^2 = 4V_2^2$;
$25V_1^2 = 4V_2^2$;
$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{V_2}{V_1}$;
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{2}$.

Пример 3.12.

Один моль (ν= 1 моль) одноатомного идеального газа переводится из состояния *1* в состояние *3* путем изохорического охлаждения *1–2*, а затем изобарического нагрева *2–3*. На участке *1–2* температура газа уменьшается на $|\Delta T|$=100 К, а в процессе всего перехода *1–2–3* к газу подвели количество теплоты

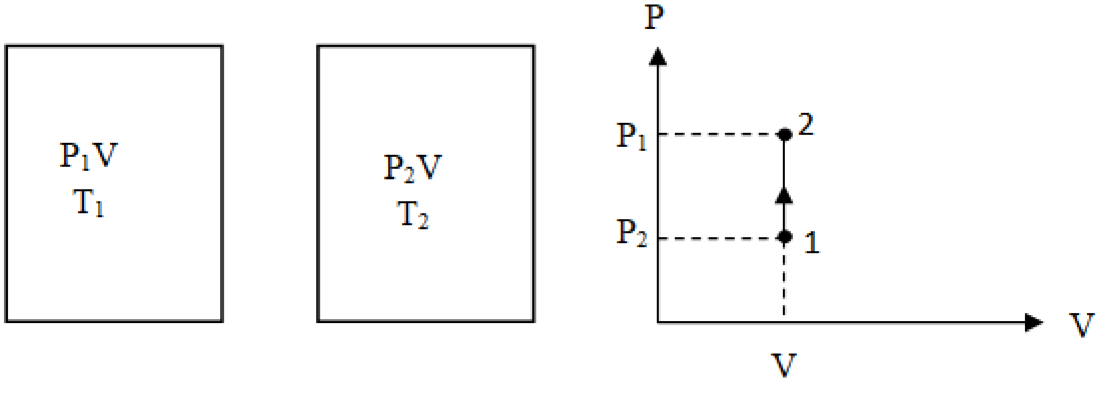
Q=1870 Дж. Какую работу A совершил газ в процессе изобарического нагрева? Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/(моль·К).



$Q = U_3 - U_1 + A;$
$U_1 = \frac{3}{2} R T_1;$
$U_2 = \frac{3}{2} R T_2;$
$U_3 = \frac{3}{2} R T_3;$
$\Delta U_{1\to2} = (-1)\frac{3}{2} R|\Delta T|;$
$Q_{12} = \Delta U_{12} = -\frac{3}{2} R|\Delta T|;$
$Q_{23} = U_3 - U_2 + A = \frac{3}{2} R(T_3 - T_2) + A;$
$\begin{cases} Q = -\frac{3}{2} R|\Delta T| + \frac{3}{2} R\Delta T_{32} + A \\ A = p_2(V_3 - V_2) = R\Delta T_{32} \ \rightarrow \Delta T_{32} \end{cases};$
$A = \frac{2}{5} Q + \frac{3}{5} R|\Delta T|.$

Пример 3.13.

В закрытом сосуде объемом V=0,0095 м^3 содержится одноатомный идеальный газ при давлении P_1=10^5 Па. Какое давление P_2 установится в сосуде, если газу сообщить количество теплоты Q=1430 Дж? Изменением объема сосуда пренебречь.

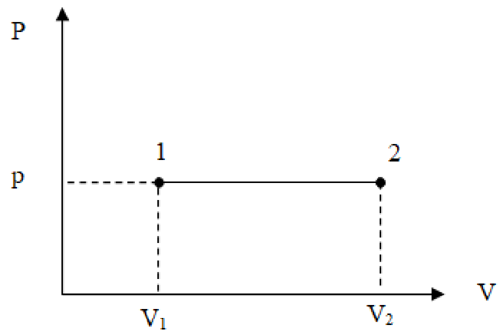


$Q = \Delta U + A_{газа};$
$A_{газа} = A_{12};$

$A_{12} = 0;$
$U_1 = \frac{3}{2}\vartheta RT_1 = \frac{3}{2}p_1V;$
$\mathrm{U_2 = \frac{3}{2}\vartheta RT_2 = \frac{3}{2}p_2V;}$
$Q = \frac{3}{2}p_2V - \frac{3}{2}p_1V + 0;$
$Q = \frac{3}{2}V(p_2 - p_1);$
$\frac{2Q}{3V} = p_2 - p_1;$
$p_2 = \frac{2Q}{3V} + p_1.$

Пример 3.14.

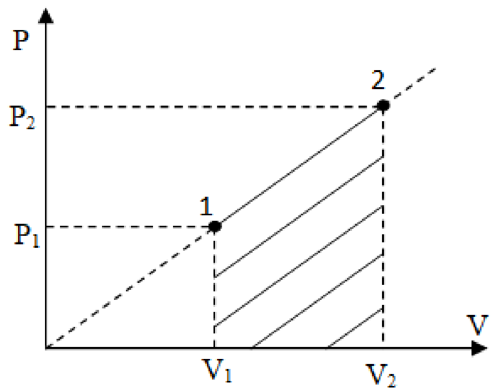
Гелий (одноатомный газ) массы m=0,0028 кг нагревают при постоянном давлении. Подведенное к газу количество теплоты равно Q=600 Дж. Найти изменение температуры ΔT газа. Молярная масса гелия μ=0,004 кг/моль, универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/(моль·К).



$A_{газа} = p(V_2 - V_1);$
$pV_2 = \frac{m}{\mu} \cdot RT_2;$
$pV_1 = \frac{m}{\mu} \cdot RT_1;$
$Q = \Delta U + A_{газа};$
$U_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_1;$
$U_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_2;$
$Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_1 + p(V_2 - V_1);$
$Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_2 + \frac{m}{\mu} \cdot RT_2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_1 - \frac{m}{\mu} \cdot RT_1;$
$Q = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT_1;$
$Q = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \Delta T;$
$\Delta T = \frac{Q \cdot 2\mu}{5mR}.$

Пример 3.15.

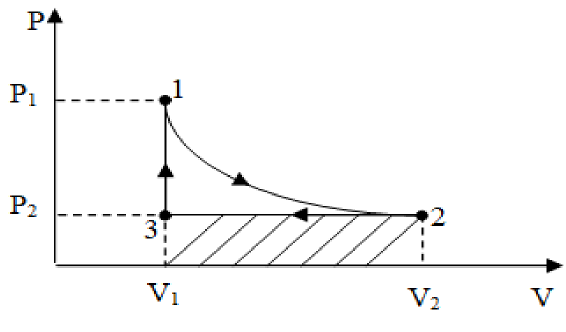
Одноатомный идеальный газ расширяется в процессе *1–2*, при этом давление газа P пропорционально объему V: P=αV, где α — неизвестный коэффициент пропорциональности. За весь процесс к газу было подведено количество теплоты, в 4 раза превышающее величину его внутренней энергии в начальном состоянии *1*. Во сколько раз увеличился объем газа?



$A_{газа} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\alpha(V_1 + V_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\alpha(V_2^2 - V_1^2);$
$Q = \Delta U + A_{газа};$
$U_1 = \frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}P_1V_1 = \frac{3}{2}\alpha \cdot V_1^2;$
$U_2 = \frac{3}{2}RT_2 = \frac{3}{2}P_2V_2 = \frac{3}{2}\alpha \cdot V_2^2;$
$U_1 = 4Q;$
$Q = \frac{3}{2}\alpha \cdot V_2^2 - \frac{3}{2}\alpha \cdot V_1^2 + \frac{1}{2}\alpha(V_2^2 - V_1^2);$
$\frac{3 \cdot \alpha \cdot V_1^2}{2} = 3\alpha V_2^2 - 3\alpha V_1^2 + \alpha V_2^2 - \alpha V_1^2;$
$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{35}{32}}.$

Пример 3.16.

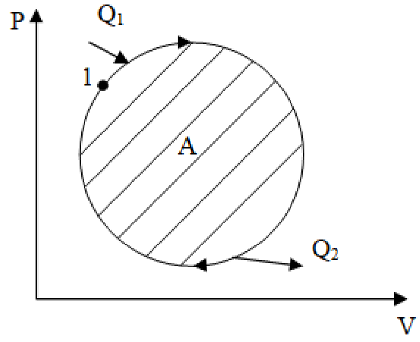
Найти работу *A*, которую совершает один моль гелия (ν=1 моль) в цикле *1–2–3–1*, состоящем из процессов адиабатического расширения *1–2*, изобарического сжатия *2–3* и изохорического нагревания *3–1*. В адиабатическом процессе *1–2* температура газа уменьшается на величину $|\Delta T|$. В изобарическом процессе от газа отвели количество теплоты *Q*.



$Q_{1\to2} = 0;$
$A_{газа} = A_{12} + A_{23} + A_{31};$
$A_{23} = P_2(V_2 - V_1);$
$p_2V_2 = \vartheta RT_2;$
$p_2V_1 = \vartheta RT_3;$

$Q_{23}=\frac{i}{2}RT_3-\frac{i}{2}RT_2+p_2(V_2-V_1)\cdot(-1)$;
$Q_{23}=(T_3-T_2)(\frac{i}{2}R+R)$;
$Q_{12}=\Delta U+A_{12}$;
$0=-\frac{i}{2}R|\Delta T|+A_{12}$;
$|Q_{23}|=\frac{i+2}{2}R|\Delta T_{23}|$;
$|A_{23}|=p_2(V_2-V_1)=R(T_2-T_3)=R|\Delta T_{23}|$;
$|A_{23}|=\frac{|Q_{23}|\cdot 2}{i+2}$;
$A=\frac{1}{2}R|\Delta T|-\frac{|Q|\cdot 2}{i+2}$.

3.3. ЦИКЛЫ



$\Delta U_{\text{цикла}}=0$; A>0;

$Q_{\text{ц}}=\Delta U_{\text{ц}}+A$; $Q_1>0$;

$Q=A$; $Q_2<0$;

В циклическом процессе обязательно есть участок на котором тепло передается - Q_1и участок, на котором тепло отбирается- Q_2.
$Q=|Q_1|-|Q_2| \Rightarrow |A|=|Q_1|-|Q_2|$;

3.3.1. КПД

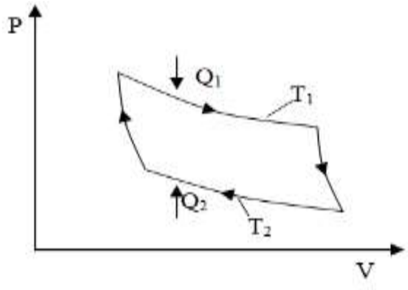
$\eta=\frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{затр}}}$ – определение из механики

3.3.2. КПД прямого цикла

$$\eta=\frac{|A|}{|Q_1|}=\frac{|Q_1|-|Q_2|}{|Q_1|}=\eta-\frac{|Q_2|}{|Q_1|};$$

3.3.3. Цикл Карно

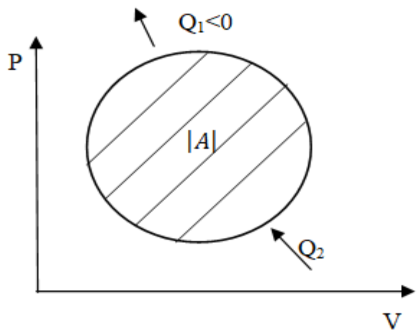
Это цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Все тепло передается на изотермеT_1 (нагреватель), а отбирается на изотерме T_2 (холодильник)



Прямой цикл Карно

$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

3.3.4. Обратный цикл



A< 0;

Q_2> 0;

Q_1< 0;

$|A| = |Q_1| - |Q_2|$;

3.3.5. КПД обратного цикла

$\eta' = \frac{|Q_2|}{|A|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$

3.3.6. Идеальная машина по обратному циклу

$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

Пример 3.17.

Идеальная тепловая машина при работе по прямому циклу имеет КПД η=0,3, ее запустили по обратному циклу. Найти КПД обратного цикла η' - ?

$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$;

$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$;

$\eta' = \frac{\frac{T_2}{T_1}}{1-\frac{T_2}{T_1}}$;

$\eta' = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-0,3}{0,3} = \frac{0,7}{0,3} = 2,1 = 210\%.$

3.3.7. Фазовые превращения

Отметим, что температура ТДС может изменяться только, если оно находится в однофазном состоянии. Фазовый переход осуществляется при постоянной температуре.

Нагревание/охлаждение: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

Плавление: $Q = m \cdot \lambda$

λ – удельная теплота плавление

Парообразования: $Q = m \cdot r$

r – удельная теплота парообразования

Пример 3.18.

Два одиноковых сосуда содержат воду: один - $m_1 = 0,1$ кг при $t_1 = 45°C$, другой $m_2 = 0,5$ кг при $t_2 = 24°C$. В сосуды наливают одинаковое количество ртути. После установления теплового равновесия в обоих сосудах температура воды оказалась одна и та же и ровна $t = 17°C$. Найти теплоемкость C_0 сосудов.

1 система лед→ 1 процесс - плавление;

2 система пар→ 1 процесс - конденсация ;

Q_1 – кол-во тепла для полного плавления льда;

Q_2 – кол-во тепла для полной конденсации пара;

$Q_1 = m_1 \cdot \lambda = 0,1 \cdot 334 \cdot 103 = 33,4 \cdot 10^3$Дж;

$Q_2 = m_2 \cdot r = 0,1 \cdot 2,3 \cdot 106 = 230 \cdot 10^7$Дж;

$Q_1 < Q_2$→плавление льда пройдёт до конца;

$Q_1' = Q_1 + mc \cdot 100$– нагрев воды (льда) до 100°;

$Q_1' = 33,4 \cdot 10^3 + 0,1 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 100 = 73,4 \cdot 10^3$;

$Q_1' < Q_1$→вода (лед) нагревается до 100°;

Уравнение теплового баланса

$Q_2' = m_2' \cdot 2$;

m_2' – масса сконденсировавшегося пара;

$m_1\lambda + m_1 c = m_2' \cdot r$;

$$m_2' = \frac{73,4 \cdot 10_3}{2,3 \cdot 10_6};$$

если$Q_2 < Q_2'$;

$m_1\lambda + m_1 c\,(T - T_1) = m_2 r + m_1 c\,(T_2 - T)$.

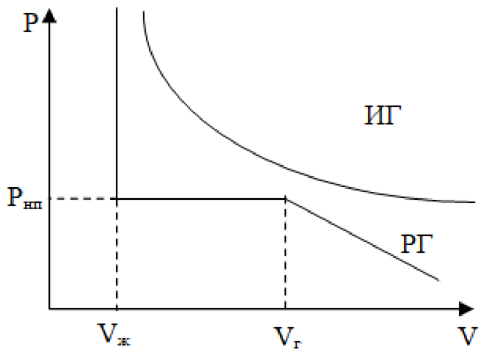
Пример 3.18.

В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды, имеющий температуру $t_1 = 5°C$, и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг, имеющий температуру $t_2 = -40°C$.

Определить температуру и объем содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

1система →вода – охлаждение;
$Q_1 = m_1 \cdot c_в \cdot 5°C = 2 \cdot 4200 \cdot 5 = 42 \cdot 10^3$Дж;
1 система →лёд – нагревание ;
$Q_2 = m_2 \cdot c_л \cdot 40°C = 5 \cdot 2100 \cdot 40 = 4620 \cdot 10^3$Дж;
$Q_1 < Q_2$→вода охладится до 0;
$Q_1' = Q_1 + m_1\lambda = 42 \cdot 10^3 + 2 \cdot 334 \cdot 10^3 = 710 \cdot 10_3$Дж;
$Q_2 < Q_1'$;
$Q_2 = Q_1 + m_1'\lambda$;
m_1' – масса кристаллизации воды;
$m_2 \cdot c_л \cdot 40 = m_1 \cdot c_в \cdot 5 + m_1' \cdot \lambda$;
$m_1' = \frac{m_2 c_л \cdot 40 - m_1 \cdot c_в \cdot 5}{\lambda}$;
$m_в = m_{1-} m_1'$;
$t_3 = 0$.

3.3.8. Изотерма реального газа



3.3.9. Относительная влажность

f= $\frac{P}{P_{нп}}$
здесь $P_{нп}$– давление насыщенного пара.

Пример 3.19.

В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью φ_1=80% при температуре T_1=300 К. Объем воздуха V_1=1,5·10^{-3} м^3. Какой станет влажность φ_2, если объем воздуха уменьшить до V_2=0,37·10^{-3} м^3, а температуру повысить до T_2=373 К? Давление насыщенного водяного пара равно P_1=3500 Па при температуре T_1 и P_2=100 000 Па при температуре T_2.

$\varphi_1 = \frac{P_1}{P_{нп1}} \Rightarrow p_1 = \varphi_1 \cdot P_{нп1}$;
$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} \cdot RT_1$;
$p_2 V_2 = \frac{m_1'}{\mu} \cdot RT_2$;
$\varphi_2 = \frac{P_2}{P_{нп2}}$;

$\varphi_1 P_{1нп} V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT_1;$
$\varphi_2 P_{2нп} V_2 = \frac{m_1}{\mu} RT_2;$
$\varphi_2 = \frac{T_2 P_{1нп} V_1}{T_1 P_{2нп} V_2} \varphi_1.$

Пример 3.20.

Относительная влажность воздуха при t_1=30 ^{0}С равна f_1=0,80. Какой будет относительная влажность f_2, если этот воздух нагреть при постоянном объеме до t_2=50 ^{0}С? Давление насыщенных паров воды при 30 ^{0}С p_1=4,23 кПа, при 50 ^{0}С - p_2=12,3 кПа.

$\varphi_1 = \frac{P_1}{P_{нп1}} \varphi_2 = \frac{P_2}{P_{нп2}};$
$P_1 V = \frac{m_n}{\mu_n} \cdot RT_1;$
$P_2 V = \frac{m_n}{\mu_n} \cdot RT_2;$
$P_1 = \varphi_1 \cdot P_{нп1} P_2 = \varphi_2 \cdot P_{нп2};$
$\varphi_1 \cdot P_{нп1} \cdot V = \frac{m_n}{\mu} \cdot RT_1;$
$\varphi_2 \cdot P_{нп2} \cdot V = \frac{m_n}{\mu} \cdot RT_2;$

$\frac{\varphi_1 \cdot P_{нп1}}{\varphi_2 \cdot P_{нп2}} = \frac{T_1}{T_2};$
$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 \cdot P_{нп1} \cdot T_2}{T_1 \cdot Рнп2}.$

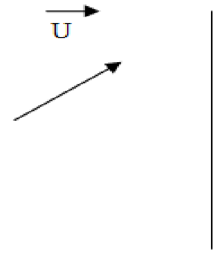
Пример 3.21.

Объем влажного воздуха, находящегося под поршнем в цилиндре при температуре T_1=283 К, изотермически уменьшают до $V_1=2\cdot10^{-3}$ м^3, при этом на стенках цилиндра появляется роса. Затем содержимое цилиндра медленно нагревают до температуры T_2=300 К, одновременно изменяя его объем до $V_2=1\cdot10^{-3}$ м^3. При этом вся жидкость со стенок цилиндра испарилась. Найти относительную влажность φ воздуха в конечном состоянии, если давление насыщенного водяного пара равно P_1=1200 Па при температуре T_1 и P_2=3500 Па при температуре T_2.

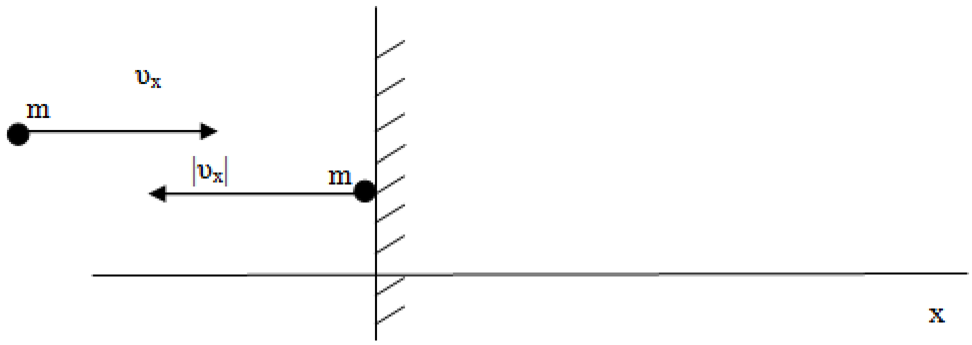
$\varphi_1 = \frac{P_1}{P_{н.п.1}};$
$\varphi_2 = \frac{P_2}{P_{н.п.2}};$
$P_1 V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot RT_1 P_2 V_2 = \frac{m}{\mu} \cdot RT_2;$ φ_1=100%=1;
$\varphi_1 = P_{н.п.1} \cdot V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \varphi_2 = P_{н.п.2} \cdot V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2;$
$m = \frac{\varphi_1 \cdot P_{н.п.1} \cdot V_1 \cdot \mu}{RT_1};$
$\varphi_2 = P_{н.п.2} \cdot V_2 = \frac{\varphi_1 \cdot P_{н.п.1} \cdot V_1 \cdot \mu}{RT_1 \mu} \cdot RT_2;$
$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 \cdot P_{н.п.1} \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot P_{н.п.2} \cdot V_2};$
$\varphi_2 = \frac{1 \cdot 1200 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 300}{283 \cdot 3500 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}72 = 72\%.$

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ)

Представим себе, что газ состоит из молекул, скорости которых равновероятно направлены в разные стороны



Найдем давление газа на стенку сосуда



Приращение импульса одной молекулы при ударе о стенку, перпендикулярную оси x:

$\Delta p_1 = 2m\upsilon_x$;

По закону сохранения импульса, ровно такой-же импульс приобретает стенка. Приращение импульса стенки при ударе N молекул:

$\Delta p = \Delta p_1 \cdot N$;

Сила, действующая на стенку при ударе Nмолекул:

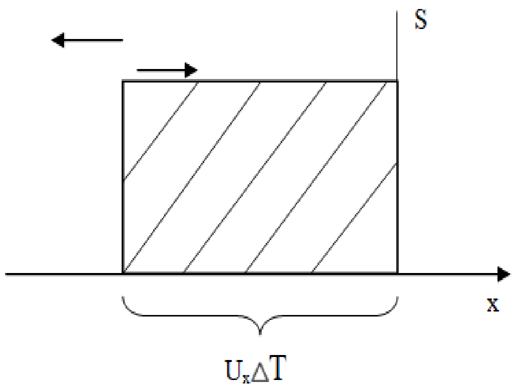
F= $m \cdot a$;

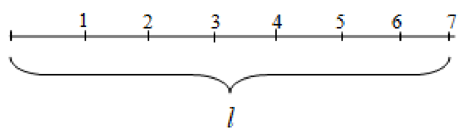
$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$;

Давление, оказываемое при этом газом на стенку:

$P_д = \frac{F}{S} \to \frac{\Delta p}{\Delta t} = P_д S$;

$P_д = \frac{\Delta p}{\Delta t S}$;





$l_{\text{ср}} = \frac{l}{7} = l/N;$

$l_{\text{ср}} = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1}{n}};$

За время Δt о стенку площадью S ударятся только те молекулы, которые оказались внутри цилиндра площадью S и высотой $v_x \Delta t$, тогда количество ударов будет равно произведению объема этого цилиндра на концентрацию молекул:

$N = n \cdot V = n \cdot v_x \Delta t S;$

Получается, что стенка площадью S за время Δt получит приращение импульса:

$\Delta p = 2mv_x \cdot nv_x \Delta t S;$

И, следовательно, газ будет оказывать давление:

$P_{\text{д}} = \frac{\Delta p}{\Delta t S} = 2mv_x^2 \cdot n;$

Учтем, что направления скоростей распределены равномерно:

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2;$

Только половина молекул, движущихся вдоль оси x, ударится о стенку, другая половина полетит в ообратную сторону.

$P_{\text{д}} = \frac{mv^2}{3} \cdot n;$

$E_n = \frac{mv^2}{2};$

$mv^2 = 2E_k;$

$P_{\text{д}} = \frac{2}{3} \cdot E_k n;$

Запишем уравнение Менделеева-Клайперона:

$P_{\text{д}} \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot RT;$

$m = M \cdot N;$

$\mu = M \cdot N_a;$

$P_{\text{д}} = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{N_a} \cdot RT;$

М – масса одной молекулы

Получили:

$P_{\text{д}} = nkT;$

Здесь $k = \frac{R}{N_a}$ – постоянная Больцмана, с другой стороны, мы только что получили, что:

$P_{\text{д}} = n \cdot \frac{2}{3} \cdot E_{k;}$

$E_k = \frac{3}{2} \cdot kT;$

Внутренняя энергия ИГ

$U = \sum \frac{i}{2} \cdot KT = \frac{i}{2} \cdot KT \cdot N;$

для одного моля

$U = \frac{i}{2} \cdot kT \cdot N_a = \frac{i}{2} \cdot RT;$

для нескольких моль

$U = \frac{i}{2} \cdot \vartheta RT;$

Так как мы рассматривали молекулу как материальную точку, т.е. одноатомный газ, то можно считать, что $\frac{1}{2}$kT приходится на каждую степень свободы.

$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot KT;$

$\upsilon = \frac{\sqrt{3KT}}{m} = \frac{\sqrt{3RT}}{\mu}$ – средняя квадратическая скорость.

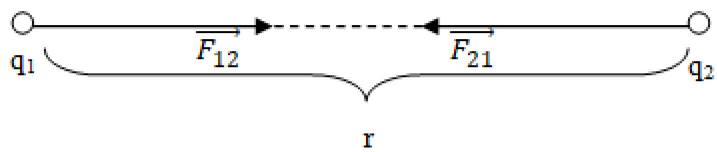
4. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

4.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

4.1.1. Свойства электрического заряда

Заряды бывают разных знаков «+», «-»
Одноименные отталкивается, разноимённые притягиваются
Дискретность Q=N·|ē|
|ē| = 1,6·10^{-19}Кл, N – число ≫ 1
Закон сохранения электрического заряда:
Заряд электрически изолированной системы сохраняется
Заряд не зависит от параметров движения:q≠q $(\vec{v}, \vec{a})$
Закон Кулона:

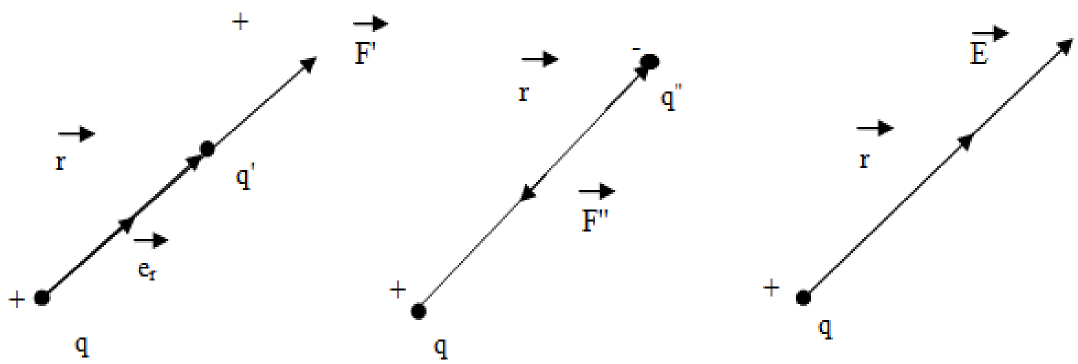
Два точечных заряда взаимодействуют друг с другом с силами, равными по модулю и противоположными по направлению, направленными вдоль прямой, соединяющей эти заряды; эта сила прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстоянию между ними.



$F_{12}=F_{21}=F_{кл}$;
$F_{кл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$.

4.1.2. Электрическое поле

Пусть источником поля является заряд q и мы сначала вносим в точку, положение которой, определяется радиус-вектором $\vec{r}$сначала заряд q' (например отрицательный), а затем заряд q'' (положительный)



$$\overrightarrow{F'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q'}{r^2}\cdot\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\right)\cdot q';$$
$$\overrightarrow{F''} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q''}{r^2}\cdot\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\right)\cdot q'';$$

Взглянув на получившиеся выражения, видим, что сила, действующая на заряды q' и q'', равна произведению некоторой векторной величины на величину заряда, с учетом его знака. При этом эта векторная величина зависит только от положения точки и величины заряда q – источника поля.

Вектор напряжённости $\vec{E}$[В/м]

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \vec{F}/q'}$$

Сила, с которой электрическое поле действует на точечный заряд q'

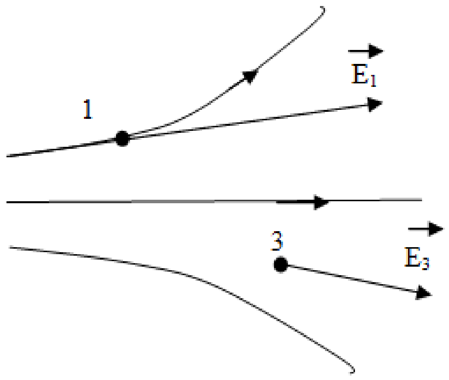
$$\boxed{\overrightarrow{F_{эл}} = q'\cdot\vec{E}}$$

4.1.3. Принцип суперпозиции

Поле, созданное в данной точке системной заряженных тел, равно векторной сумме полей, созданных в данной точке, каждым из заряженных тел в отдельности.

4.1.4. Линии напряжённости

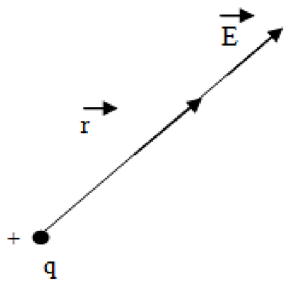
1. В любой точке, через которую проходит линия напряжённости, веутор $\vec{E}$ направлен к ней по касательной.
2. Плотность линии напряжённости пропорциональна модулю напряжённости в данной области пространства.

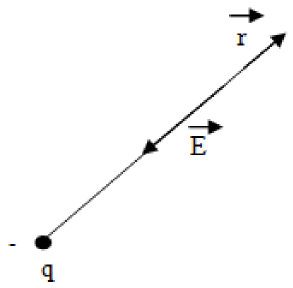


Вектор напряжённости – силовая характеристика электрического поля в данной точке.

4.1.5. Электрические поля

1) Поле точечного заряда



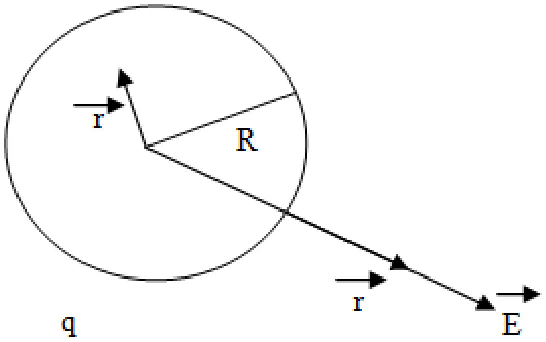


По модулю равно:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qE}{r^2}$;

И направлено параллельно радиусу от заряда, если источник поля положительный заряд и к заряду, если источник – отрицательный $\vec{E}||\vec{r}$.

2) Поле равномерно заряженной сферырадиуса R и заряда q



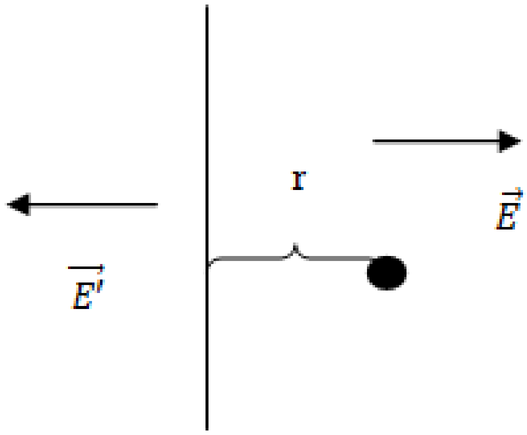
$$r < R \quad ; \quad E = 0;$$

$$r \geq R; \ \mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{r}^2};$$

$$E||r.$$

3) Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ

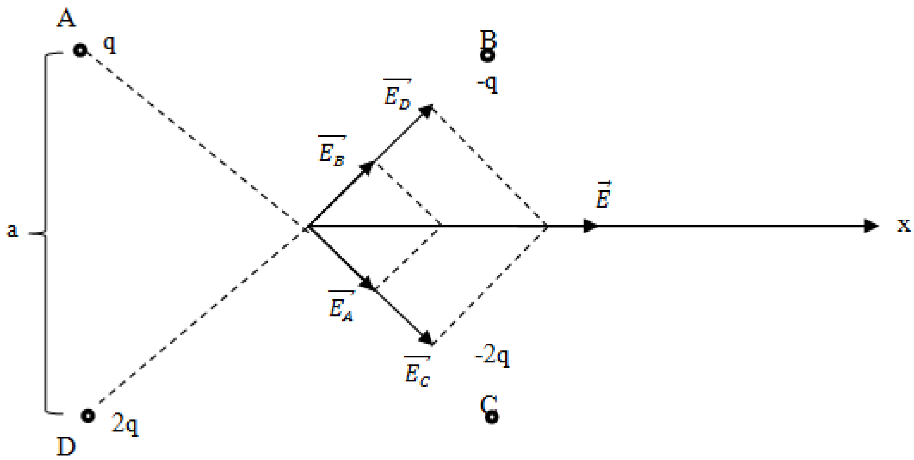
$$\sigma = q/S;$$



$E = \frac{\sigma}{E_0}$ $\vec{E}\perp$ плоскости такое поле – однородное

Пример 4.1.

В вершинах квадрата *ABCD* со стороной *a* находятся заряды q_A=*q*, q_B=–*q*, q_C=–2*q*, q_D=2*q*. Найти напряженность поля **E** в центре квадрата.



$$\vec{E} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_C} + \overrightarrow{E_D};$$

$$E_A = E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\cdot 2}{a^2};$$

$$E_D = E_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q\cdot 2}{a^2};$$

Из симметрии системы, нетрудно видеть, что результирующее поле будет направлено вдоль оси x, параллельной стороне DC:

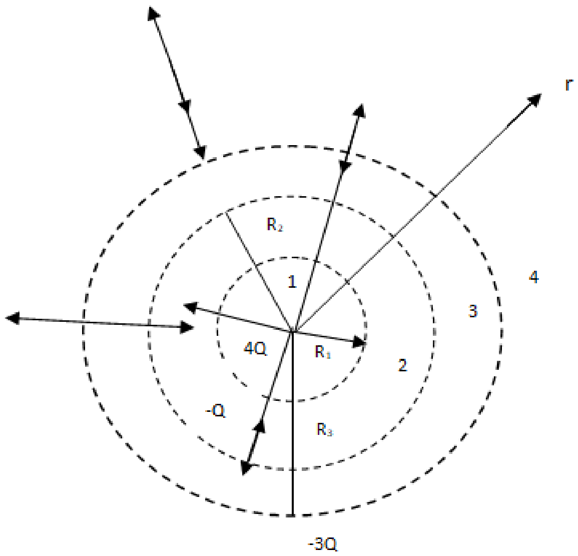
$$E = E_x = E_{Ax} + E_{Bx} + E_{Cx} + E_{Dx} = 2E_{Ax} + 2E_{Dx};$$

$$E = 2E_A \cdot \cos\frac{\pi}{4} + 2E_0 \cdot \cos\frac{\pi}{4};$$

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4.2.

Радиусы трех концентрических сферических поверхностей равны R_1, R_2 и R_3. Их заряды 4*Q*, -*Q* и -3*Q*, соответственно. Построить график зависимости напряженности электрического поля от координаты r, отложенной вдоль оси с началом в центре сфер.



Выберем четыре произвольные точки: А расположена внутри сферы радиуса R_1, В–между сферами R_1 и R_2, С - между сферами R_2 и R_3 и D – за поверхностью сферы R_3

1) $r<R_1$ $E_1 = 0;$

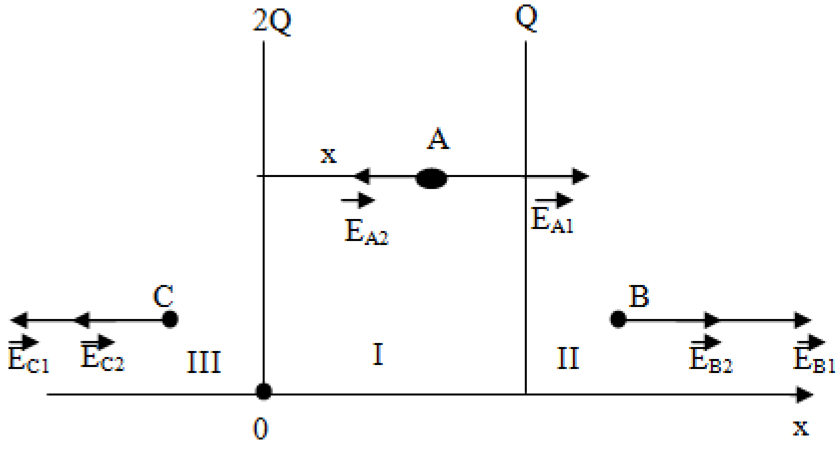
2) $R_1 \leq r < R_2$ $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4Q}{r^2};$

3) $R_2 \leq r < R_3$ $E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4Q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3Q}{r^2};$

4) $r \geq R_3$ $E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{4Q}{r^2} - \frac{Q}{r^2} - \frac{3Q}{r^2}\right) = 0.$

Пример 4.3.

Две тонкие квадратные металлические пластины со стороной L находятся на расстоянии d друг от друга. На них помещают заряды $2Q$ и Q. Построить график зависимости напряженности электрического поля от координаты x (ось x перпендикулярна плоскости пластин).



Выберем три точки произвольно расположенные в соответствующих областях: А между пластинами, В – справа от пластин и С – слева от плавтин. Каждая пластин создает с обеиз сторон от себя однородное поле:

$E_{A1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2q}{L^2 2\varepsilon_0}$;

$E_{A2} = \frac{Q}{L^2 2\varepsilon_0}$;

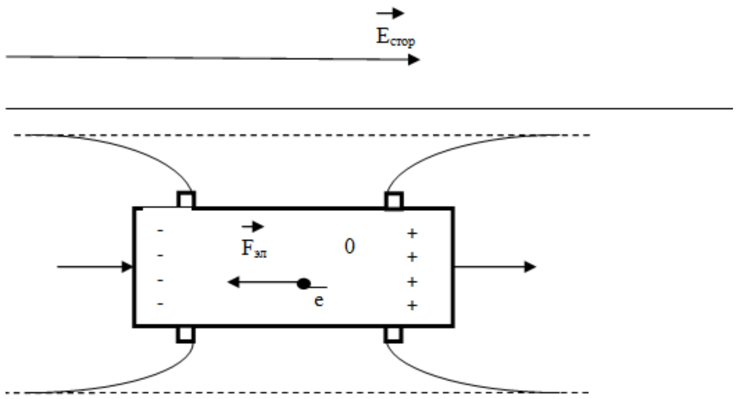
A: $E_A = E_{A1} - E_{A2} = \frac{2Q}{L^2 2\varepsilon_0} - \frac{Q}{L^2 2\varepsilon_0} = \frac{Q}{L^2 2\varepsilon_0}$;

B: $E_B = E_{B1} + E_{B2} = \frac{3Q}{L^2 2\varepsilon_0}$;

C: $E_c = -E_{c1} - E_{c2} = -\frac{3Q}{L^2 2\varepsilon_0}$.

4.1.6. Проводник в Электрическом поле

проводник: $n=10^{22}$ свободных носителей заряда в 1 см^3
диэлектрик: $n=10^{8}$свободных носителей заряда в 1 см^3



$\vec{E} = \overrightarrow{E_{\text{стор}}} + \overrightarrow{E_{\text{инд}}}$.

Явление перераспределения заряда внутри проводника в результате внесения его в электрическое поле называется явлением электрической индукции.

Свойства проводника в ЭП:

1. ЭП внутри проводника всегда равно нулю ($E_{\text{внутр}}$. = 0)

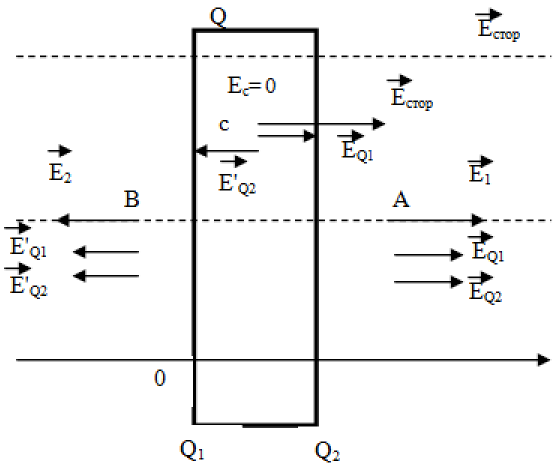
2. Избыточный заряд, помещенный на проводник, распределяется только по поверхности проводника.

3. Линии напряженности входят в проводник перпендикулярно поверхности проводника.

4. Поверхность проводника - эквипотенциальна.

Пример 4.4.

Напряженность электрического поля вблизи одной стороны металлической пластинки площади Sравна $\overrightarrow{E_1}$, а вблизи другой $\overrightarrow{E_2}$ ($\overrightarrow{E_1}$ и $\overrightarrow{E_2}$ направлены противоположно). Найти величину силы, действующей на пластинку со стороны электрического поля.



Обозначим Q – заряд всей пластины, Q_1 и Q_2 – заряды образовавшиеся на левой и правой гранях пластины, соответственно. Согласно закону сохранения заряда:

$Q_1 + Q_2 = Q;$

$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{\mathrm{E}_{стор}} + \overrightarrow{\mathrm{E}_{Q_1}} + \overrightarrow{E_{Q_2}};\ E_{Q_1} = \frac{Q_1}{S2\varepsilon_0};$

$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{\mathrm{E}_{стор}} + \overrightarrow{\mathrm{E}'_{Q_1}} + \overrightarrow{E'_{Q_2}};\quad E_{Q_2} = \frac{Q_2}{S2\varepsilon_0};$

предположим $Q_1 > 0;\ Q_2 > 0,$

Поле внутри проводника равно 0, выберем любую точку С внутри пластины:

$C: 0 = E_{стор} + \mathrm{E}_{Q_1} - \mathrm{E}_{Q_2};$

$0 = E_{стор} + \frac{Q_1}{S\varepsilon_0 2} - \frac{Q_2}{S\varepsilon_0 2};$

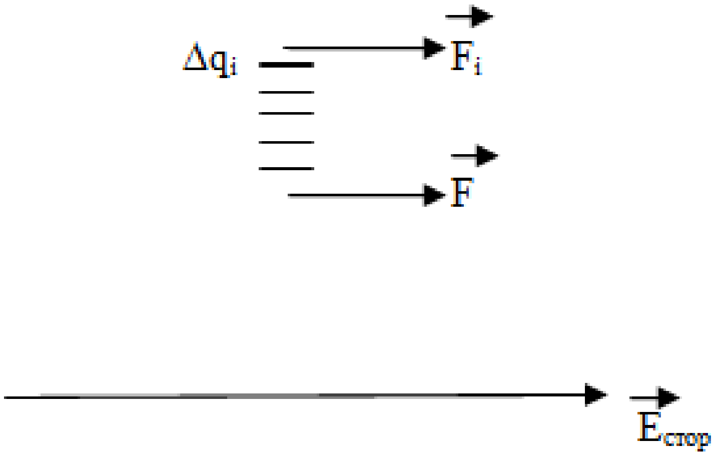
$A: E_1 = E_{стор} + \mathrm{E}_{Q_1} + \mathrm{E}_{Q_2};$

$E_1 = E_{стор} + \frac{Q_1}{2S\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{2S\varepsilon_0};$

$B: 3) - E_2 = E\ _{стор} - \frac{Q_1}{2S\varepsilon_0} - \frac{Q_2}{2S\varepsilon_0};$

$\mathrm{Q} = Q_1 + Q_2.$

Для того, чтобы найти силу действующую на пластину со стороны поля, разобьем пластину на множество точечных зарядов Δq_i и посчитаем силу действующую на всю пластину, как сумму сил действующих на каждый из точечных зарядов



$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ – сила, действующая на точечный эл. заряд qсо стороны эл. поля E

$F_i = q_i E_{стор}$;

$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot E_{стор} = E_{стор} \cdot \sum_{i=1}^{N} q_i$;

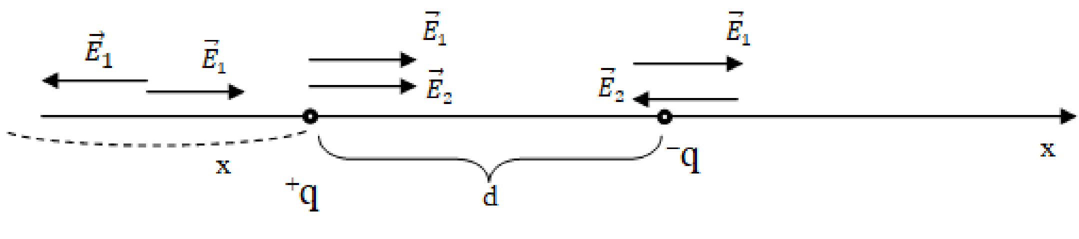
$F = \mathrm{Q}E_{стор}$;

$$F = \frac{(E_1^2 - E_2^2)S\varepsilon_0}{2}.$$

Пример 4.5.

Найти зависимость напряженности от координаты точки вдоль линии, проходящей через два точечных заряда, находящихся на расстоянии d друг от друга. Начало координат совпадает с положением левого заряда. Величины зарядов равны) $+q$ и -q; в) $+q$ и $-2q$.

б) $^+$q и $^-$q E_x(x) - ?

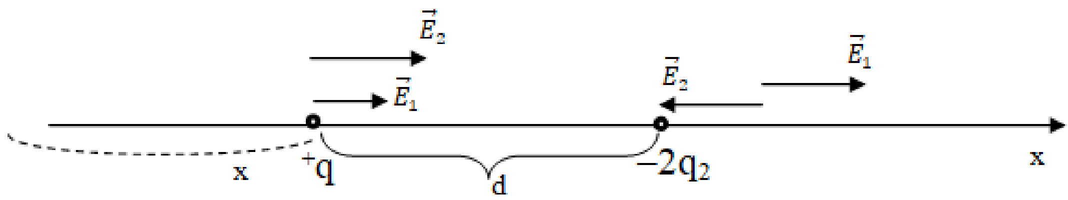


$0 \div d \quad E_x = E_1 + E_2 = \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{(d-x)^2}$;

$x > d \quad E_x = E_1 + E_2 = \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{(x-d)^2}$;

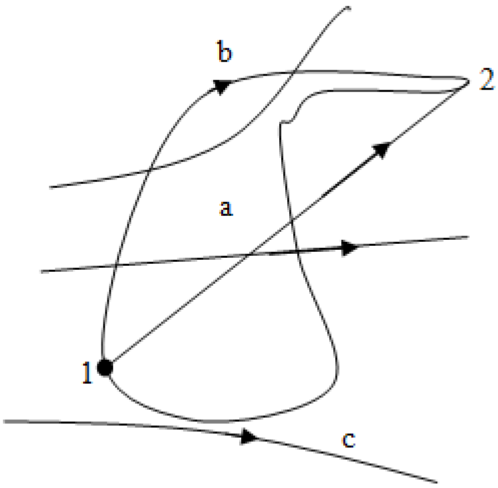
$x < 0 \quad E_x = E_2 + E_1 = \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{(d+|x|)^2} + \frac{1}{4ПE_0} \cdot \frac{q}{x^2}$;

в) +q и –2q E_x(x) - ?



$$0 \div d \quad E_x = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{(d-x)^2};$$
$$x > d \quad E_x = E_1 - E_2 = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{(x-d)^2};$$
$$x < 0 \quad E_x = E_2 - E_1 = \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{(d+|x|)^2} + \frac{1}{4\Pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2}.$$

4.1.7. Работа ЭП



Электрическое поле консервативно
$\Rightarrow A_{эл\ 1-a-2} = A_{эл\ 1-b-2} = A_{эл\ 1-c-2}$
Разность потенциалов: $\varphi_1 - \varphi_2 = A_{эл\ 1\to 2}/q$

4.1.8. Потенциал

$$\varphi_1 = A_{эл\ 1\to 0}/q$$

Обычно, потенциал равный нулю принимают на бесконечном удалении от источника поля, исключаемое – однородное поле, здесь потенциал равный нулю принимают в любой точке.

4.1.9. Принцип суперпозиции

Если поле создаётся системой заряженных тел, потенциал в нужной нам точке равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в данной точке каждым из заряженных тел в отдельности.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_1$$

Работа ЭП по переносу точечного заряда q' из точки 1 в точку 2

$$A_{эл\ 1\to 2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$A_{конс} = -\Delta W$$

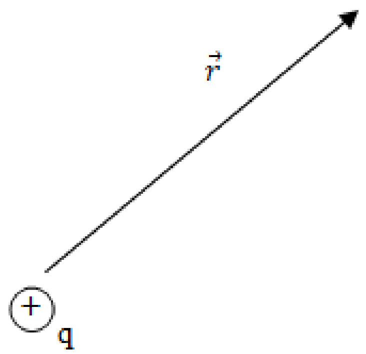
$W_{эл} = q'\varphi$–энергия точечного заряда в электрическом поле

4.1.10. Энергия системы точечных зарядов

$$W_{эл} = \frac{1}{2}\sum q_i\,\varphi_i$$

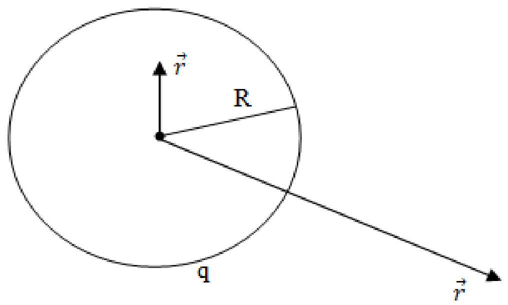
φ_i – потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами, кроме q_i, в точке где находится q_iзаряд.

4.1.11. Потенциал точечного заряда



$$\varphi = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{q}{r}$$

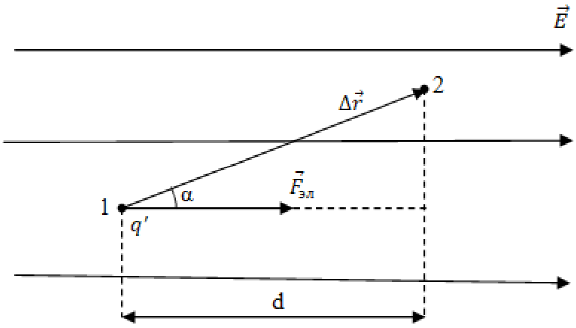
4.1.12. Потенциал равномерно заряженной сферы R, q



$r \le R$ $\qquad\qquad$ $\varphi = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}$

$r > R$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$

4.1.13. Разность потенциалов в однородном ЭП



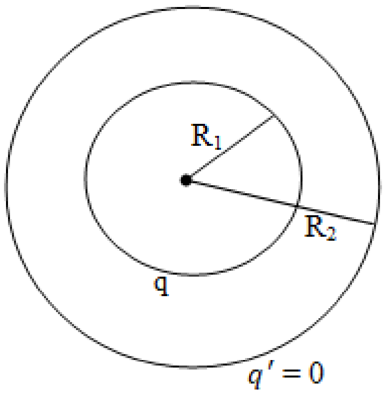
$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{эл1\to2}}{q'};$
$F_{эл} = q' \cdot \vec{E};$
$A_{эл1\to2} = F_{эл} \cdot \Delta\vec{r} = q' \cdot E \cdot |\Delta r| \cdot \cos(\alpha);$
d– расстояние между точками 1 и 2 вдоль линий напряжённости.
$A_{эл1\to2} = q' \cdot E \cdot d;$
$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d$

эквипотенциальная поверхность – геометрическое место точек, где φ=const

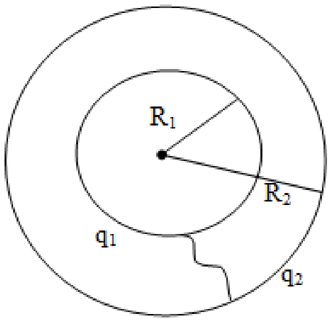
Вектор напряжённости всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Пример 4.5(б).

Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ, окружают сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Как изменится потенциал шара после того, как он будет на короткое время соединен проводником с оболочкой.



$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R_1} + 0 \to q = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 R_1 \cdot \varphi;$



$\varphi_ш = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{R_2};$

$\varphi_{об} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{R_2};$

$\varphi_ш = \varphi_{об}$(единый проводник)

$\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{R_2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{R_2};$

$\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} = \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2};$

$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_1}{R_2};$

$(q_1R_2 - q_1R_1) = 0;$

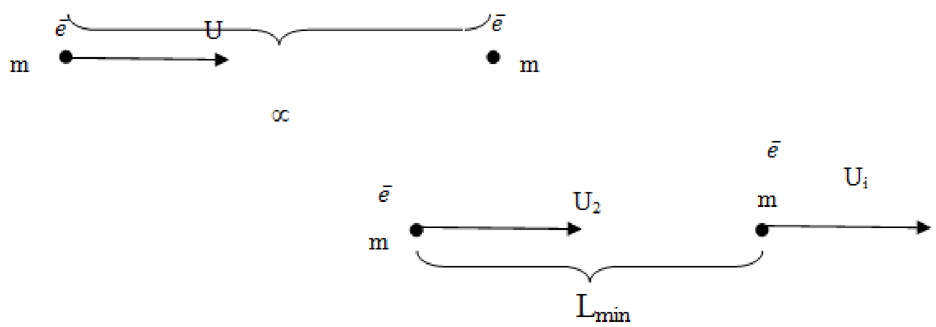
$q_1(R_2 - R_1) = 0;$ $\quad q = 0;$

$\Delta\varphi=\varphi(R_1/R_2-1).$

4.1.14. Движение заряженных частиц в ЭП

Пример 4.6.

Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии один от другого, причем один электрон вначале покоится, а другой имеет скорость *V*, направленную к центру первого. Масса электрона *m*, заряд *e*. Определить наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.



ЗСИ: $mU = 2mU_2;$

Теорема о кинетической энергии: $\left(\frac{mU_2^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2}\right) - \frac{mU^2}{2} = A_{эл};$

$A_{эл} = \mathrm{e}(\varphi_1 - \varphi_2) = e\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{L_{min}}\right);$

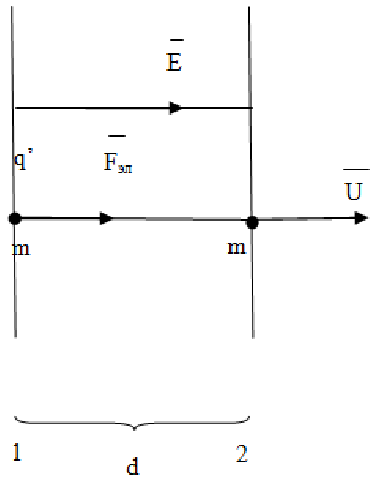
$mU = 2mU_2;$

$mU_2^2 - \frac{mU^2}{2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L_{min}};$

$$L_{min} = \frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 mU^2}.$$

4.1.15. <u>Движение заряженных частиц в однородном электрическом поле</u>

I Разгон (торможение) – применим теорему о кинетической энергии, чтобы найти скорость тела, разогнанного разностью потенциалов:



$\frac{mV^2}{2} - 0 = A_{эл1\to2}$-;

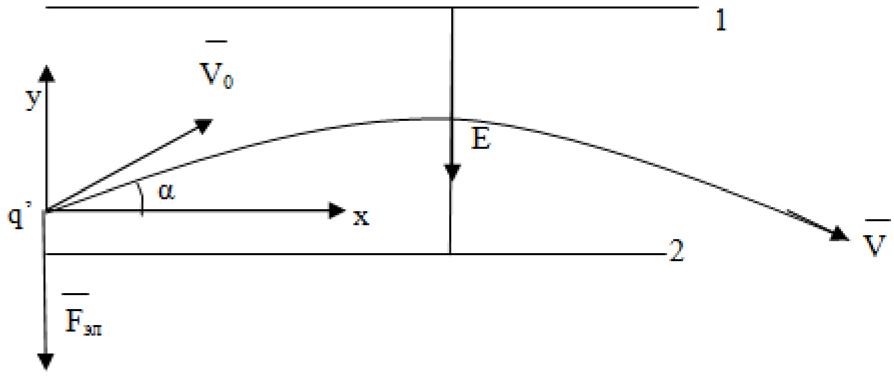
$\frac{mV^2}{2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2);$

$V = \sqrt{\frac{(2q'(\varphi_1-\varphi_2))}{m}};$

$Ed = (\varphi_1 - \varphi_2);$

$V = \sqrt{\frac{(2q'\cdot E\cdot d)}{m}};$

II Отклонение от первоначального направления



$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{эл}}; ma = q'\bar{E}$$

$$\vec{a} = \frac{q'\vec{E}}{m} = \overrightarrow{const}; a = \frac{q'(\varphi_1 - \varphi_2)}{md};$$

Движение равноускоренное

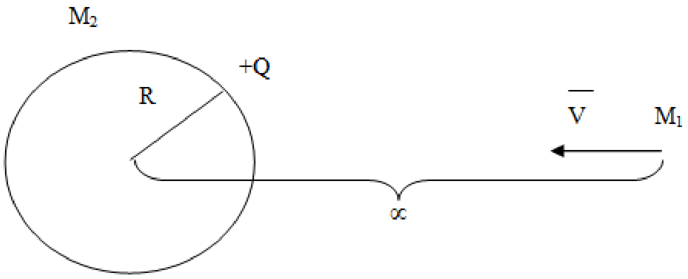
$\vec{a} = \overrightarrow{const};$

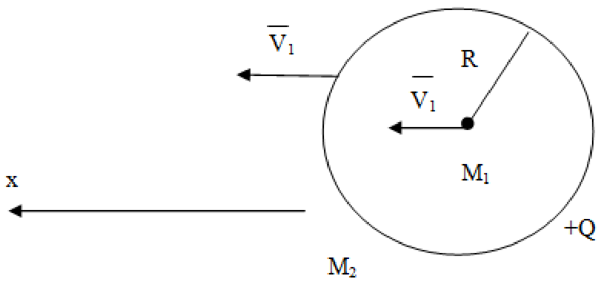
$\vec{V} = \overrightarrow{V_0} + \vec{a}t;$

$\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{V_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$

Пример 4.7.

Заряженная частица массы M_1, имеющая на бесконечности скорость V, движется вдоль оси, проходящей через центр тонкой непроводящей свободной сферы радиуса R и влетает внутрь нее через маленькое отверстие. В тот момент, когда частица пролетает центр сферы, относительная скорость тел равна нулю. Масса сферы равна M_2, по ней равномерно распределен заряд +Q, в начальный момент сфера покоится. Найти заряд частицы. Гравитационным взаимодействием тел пренебречь.

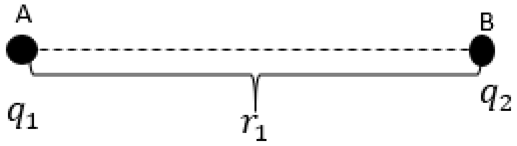


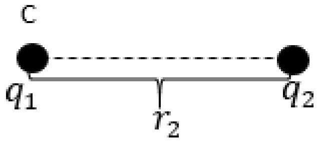


$$M_1\vec{V} = M_1\vec{V}' + M_2\vec{V}_1;$$
$$M_1\vec{V} = M_1\vec{V}_1 + M_2\vec{V}';$$
$$M_1V = V_1(M_1 + M_2);$$
$$\frac{(M_1V'^2)}{2} + \frac{(M_1V_1^2)}{2} - \frac{M_1V^2}{2} = A_{эл};$$
$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2);$$
$$\begin{cases} \left(\frac{M_1V_1^2}{2} + \frac{(M_1V_1^2)}{2}\right) - \frac{M_1V^2}{2} = q\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\right) \\ M_1V = V_1(M_1 + M_2) \end{cases};$$
$$q = \frac{M_2^2V^2 4\pi\varepsilon_0 R}{2(M_1+M_2)Q}.$$

Пример 4.8.

Два точечных заряда q_1=6,6·10^{-9} Кл и q_2=1,32·10^{-8} Кл находятся на расстоянии r_1=40 см. Какую надо совершить работу, чтобы сблизить их до расстояния r_2=25 см?





Пусть источником поля является заряд q_2, а заряд q_1 перемещается из точки А в точку С, тогда работа по перемещению точечного заряда равна:

$A_{A\to C} = q_1(\varphi_A - \varphi_C)$

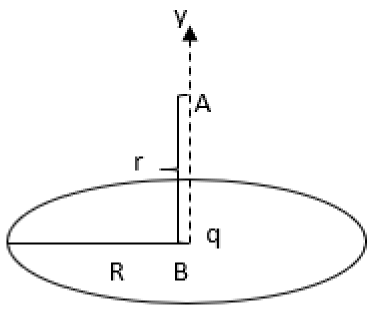
$\varphi_A = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{r_1}$

$\varphi_C = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{r_2}$

$A_{A\to C} = q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_2}{r_1} - \frac{q_2}{r_2})$

Пример 4.9.

По тонкому кольцу радиуса R неравномерно распределен заряд Q. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда q из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии r от центра.



Разобьем кольцо на множество точечных зарядов q_i, каждый из них создает в интересующей нас точке потенциал, здесь r_1 расстояние от точечного заряда q_i до точки, в которой вычисляем потенциал:

$\varphi_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_i}{r_1}$

Тогда результирующий потенциал, создаваемый кольцом в точке на его оси:

$\varphi = \sum \varphi_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sum q_i}{r_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r_1}$

$Q = \sum q_i$

$\varphi_B = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}$

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

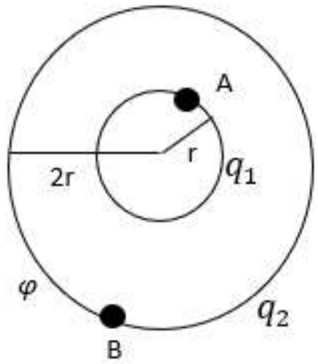
Работа электрического поля по переносу точечного заряда q:

$$A = q(\varphi_B - \varphi_A)$$

$$A = q(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2 + r^2}})$$

Пример 4.10.

Потенциал внутренней сферы радиуса r равен нулю (сфера заземлена). Потенциал внешней сферы радиуса $2r$ равен φ. Определить заряды этих проводящих концентрических сфер.



По условию задачи потенциал внутренней сферы равен 0, для удобства выберем произвольную точку А на ее поверхности: $\varphi_A = 0$

В данной точке потенциал создают два заряженных тела: внутренняя и внешняя сферы:

$$\varphi_A = \varphi_{q_1} + \varphi_{q_2}$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2r}$$

Аналогично рассматриваем внешнюю сферу

$$\varphi_B = \varphi_{q_1} + \varphi_{q_2}$$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1}{2r} + \frac{q_2}{2r}) \\ 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{2r}) \end{cases}$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{q_2}{4r} - \frac{q_2}{2r})$$

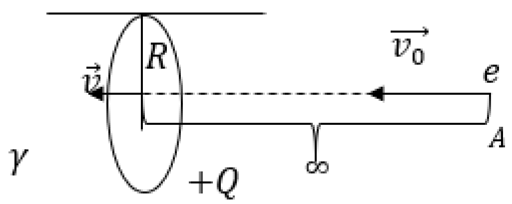
$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q_2}{4r})$$

$$q_2 = 16\varphi_B\pi\varepsilon_0 r$$

$$q_1 = -8\varphi_B\pi\varepsilon_0 r$$

Пример 4.11.

С какой скоростью пролетит электрон, втягиваемый в неподвижное кольцо, заряженное положительно и с линейной плотностью γ, через центр кольца. Электрон находится в бесконечности.



$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = \text{Аэл}$$

$$\text{Аэл} = e\left(0 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\right)$$

Потенциал в центре кольца нашли аналогично примеру 19.4, при этом заряд кольца равен, а заряд электрона e - отрицательный:

$$Q = \gamma 2\pi R$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = -e\frac{Q}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - e\frac{Q}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

4.1.16. Электроемкость (емкость уединенного проводника)

Уединенным проводником называется проводник, расположенный бесконечно далеко от других тел, при этом отсутствует какое-либо стороннее электрическое поле

Экспериментально установлено, что заряд уединённого проводника прямо пропорционален его потенциалу.

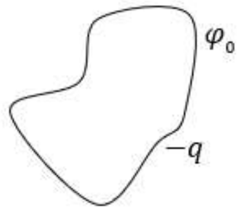
С – коэффициент пропорциональности, называется электроемкостью (емкостью) уединенного проводника, зависит только от формы и геометрических размеров проводника, С не зависит ни от заряда, ни от потенциала!

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$q = C\varphi$$

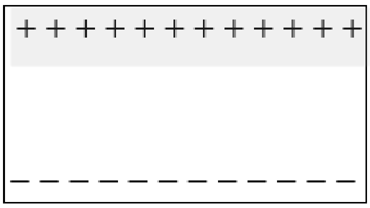
4.1.17. Не уединенный проводник

Рассмотрим ситуацию, что рядом с заряженным проводником $-q$, находится не заряженный проводник, максимально простой формы.



$$C_0 = \frac{q}{\varphi_0}$$

В незаряженном проводнике возникает явление электрической индукции, которое проявляется в том, что на ближней к заряженному проводнику поверхности образуется макроскопический заряд противоположного знака, а на удаленной поверхности – одноименного знака, при этом суммарный заряд этого проводника не меняется и остается равным 0.



$-$не заряженный проводник

Теперь каждый из индуцированных зарядов, создает свой потенциал на поверхности заряженного проводника, и его потенциал меняется:

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{"-"} + \varphi_{"+"}$

Очевидно, так как положительные заряды находятся ближе, а по модулю положительные и отрицательные индуцированные заряды равны, то:

$|\varphi_{"+"}| > |\varphi_{"-"}|$

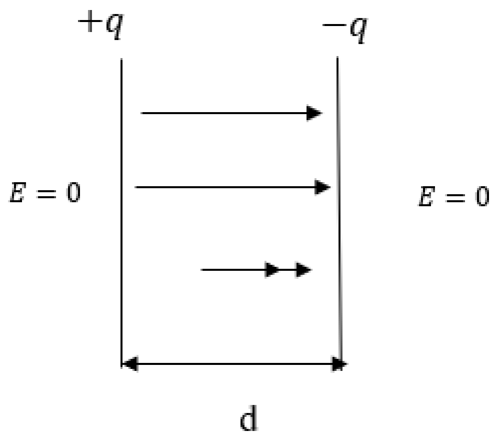
$\varphi > \varphi_0$

$=> C = \frac{q}{\varphi} < C_0$

Самое главное, что наличие электрического поля, создаваемого заряженным проводником приводит к тому, что его электроемкость меняется при внесении в его поля любого тела, даже незаряженного.

4.1.18. <u>Конденсатор </u>(плоский)

Попробуем создать систему заряженных проводников, которая не создает снаружи себя электрическое поле, например плоский конденсатор – система двух параллельных проводящих пластин, такая, что геометрические размеры пластин много больше расстояния между ними d, одну зарядим положительным зарядом, а вторую – отрицательным, равным по модулю

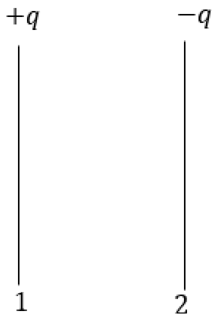


$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2s\varepsilon_0}$$
$$E = E_1 + E_2 = 2E_1$$
$$E = \frac{q}{s\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

E – поле внутри конденсатора.

4.1.19. Емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

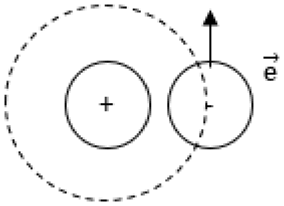


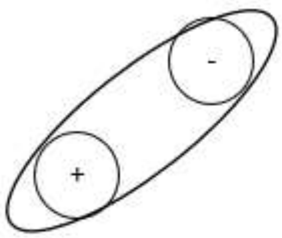
Найдем емкость плоского конденсатора, площадь пластин которого S, а расстояние между ними d

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{q}{S\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

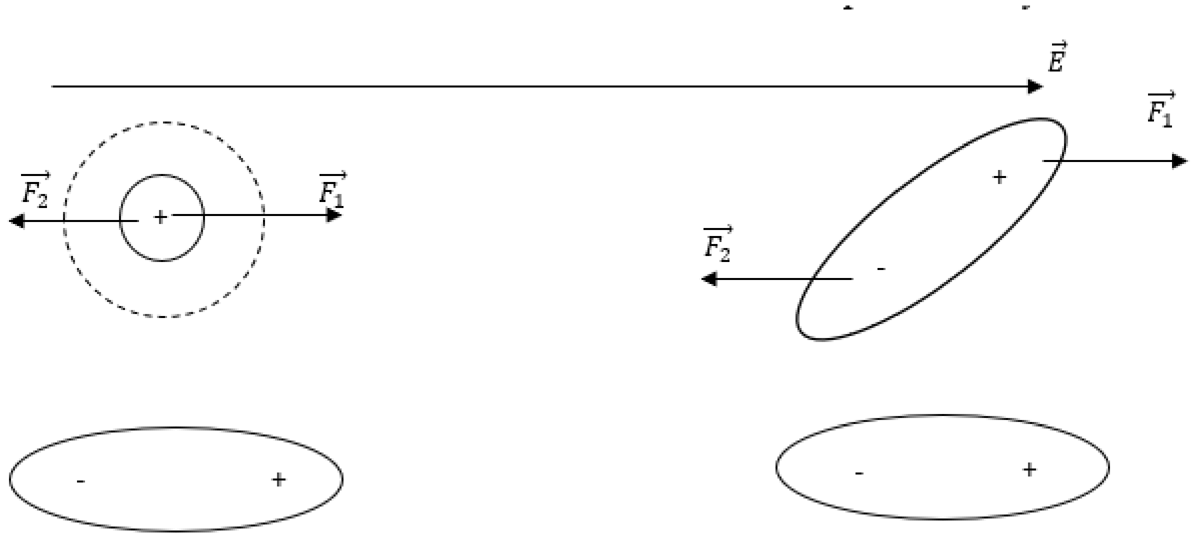
4.1.20. Диэлектрик в электрическом поле



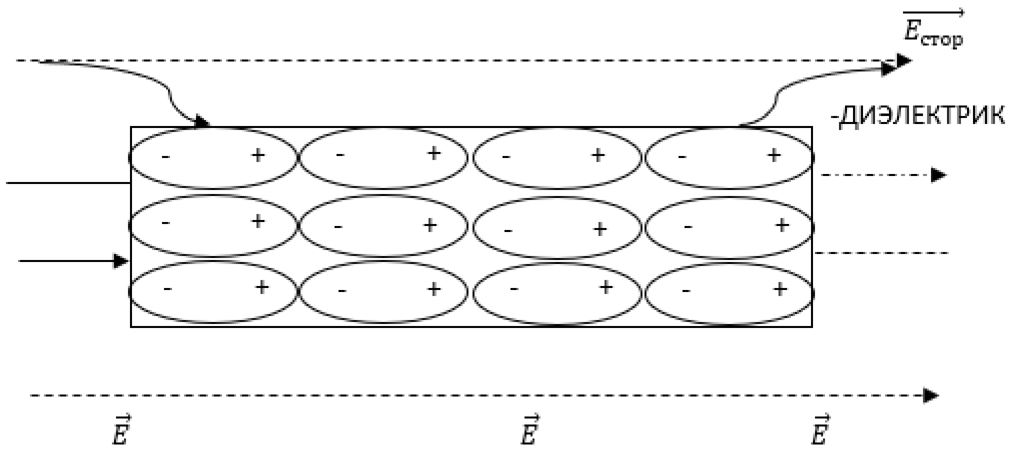


Неполярная молекула

Полярная молекула

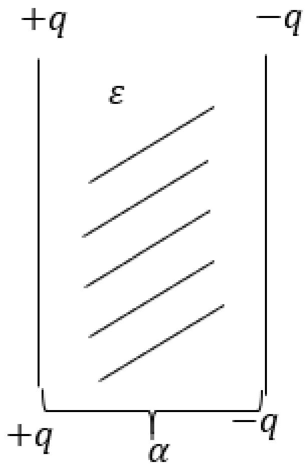


Таким образом если поместить в стороннее электрическое поле как полярную, так и неполярную молекулы, то результат будет одинаковым: молекулы поляризуются и выстроятся вдоль линий электрического поля. Результирующее поле изменится, так как упорядоченная структура молекул, создает некомпенсированные макроскопические заряды, которые в свою очередь создают свое собственное электрическое поле, которое скалывается со сторонним. Внутри диэлектрика, форма которого совпадает с эквипотенциальными поверхностями поле уменьшается в ε раз, где ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.



Пример 4.13.

Найти емкость плоского конденсатора α, S, ε



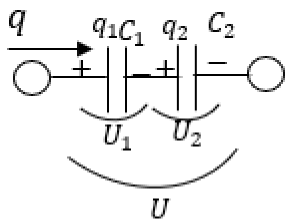
$C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$

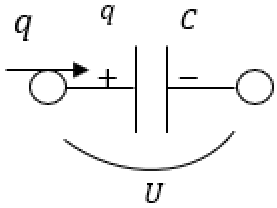
$E = \dfrac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon}$

$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$

$C = \dfrac{S\varepsilon_0\varepsilon}{d}$

4.1.21. <u>Последовательное соединение конденсаторов</u>





Разность потенциалов на батарее конденсаторов равна сумме разностей потенциалов на первом и втором конденсаторе: $U = U_1 + U_2$.

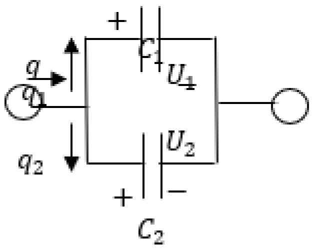
Рассмотрим проводник состоящий из правой (отрицательно заряженной обкладки) первого конденсатора, соединительного провода и левой (положительно заряженной) обкладки второго конденсатора. Заряд этого проводника до подключения в электрическую схему равен 0, после подключения его заряд не может измениться, так как он электрически изолирован от остальной схемы, следовательно, по закону сохранения электрического заряда: $0 = -q_1 + q_2$.

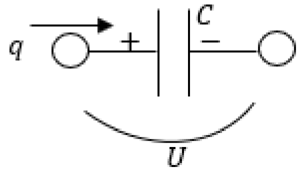
Если считать, что заряд пришедший из внешней схемы - q, заряжает только левую обкладку первого конденсатора, то можно сделать вывод, что при последовательном соединении конденсаторов заряды всех конденсаторов равны: $q_1 = q_2 = q$.

Вспомним определение емкости конденсатора: $\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$.
Получаем:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

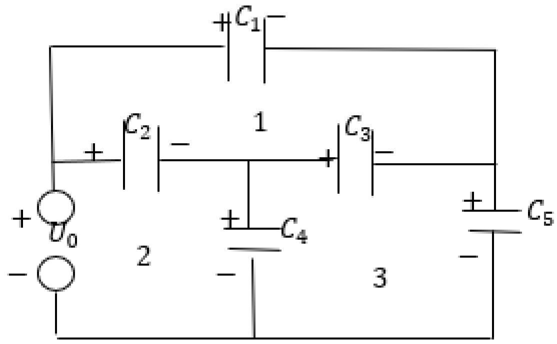
4.1.22. Параллельное соединение конденсаторов





$C = \frac{q}{U}$
$U = U_1 + U_2$
$q_1 + q_2 = q$ – ЗСЭЗ
$CU = C_1U_1 + C_2U_2$
$C = C_1 + C_2$

4.1.23. Произвольное соединение



В нашей схеме есть два электрически изолированных проводника, первый состоит из «-» обкладки C_2, «+» C_3 и «+» C_4, второй из «-» C_1, «-» C_3 и «+» C_5.

Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из конденсаторов C_1, C_3 и C_2. Разность потенциалов при обходе контура равна 0, с другой стороны, она складывается из алгебраической суммы разностей потенциалов на всех трех конденсаторов, при этом, если мы идем от «+» к «-», то разность потенциалов берется со знаком «+», если от «-» к «+» то – отрицательная:

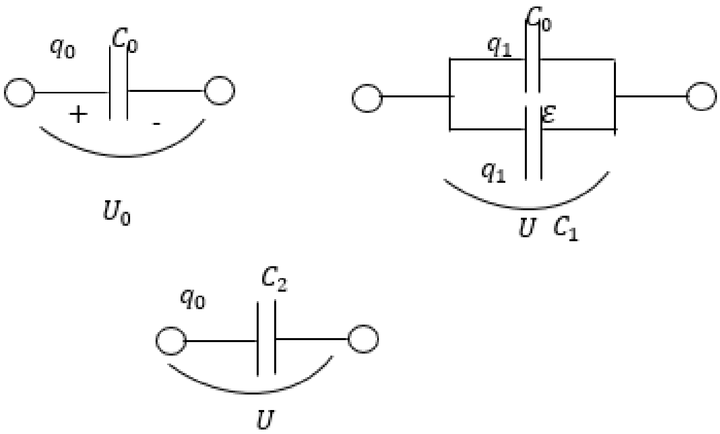
$$0 = U_1 - U_3 - U_2$$

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -q_2 + q_3 + q_4 \\ 0 = -q_1 - q_3 + q_5 \\ 0 = \dfrac{q_1}{C_1} - \dfrac{q_3}{C_3} - \dfrac{q_2}{C_2} \\ 0 = \dfrac{q_2}{C_2} + \dfrac{q_3}{C_3} + \dfrac{q_5}{C_5} - U_0 \\ 0 = \dfrac{q_3}{C_3} + \dfrac{q_5}{C_5} - \dfrac{q_4}{C_4} \end{cases}$$

Пример 4.14.

Воздушный конденсатор, заряженный до разности потенциалов U_0=800 В, соединили параллельно с таким же по размерам незаряженным конденсатором, заполненным диэлектрикам. Какова диэлектрическая проницаемость этого диэлектрика, если после соединения разность потенциалов стала равна U=100 В?



$$C_0 = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$
$$C_1 = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{d}$$

C_0 – емкость воздушного конденсатора, C_1 – емкость такого же по размерам конденсатора с диэлектриком. Так как источник не подключен, то суммарный заряд на батарее конденсаторов равен заряду исходного конденсатора:

$$q_0 = q_1 + q'$$

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{q_0}{U} \\ C_0 = \dfrac{q_0}{U_0} \\ C_2 = C_0 + \varepsilon C_0 \end{cases}$$

$$\frac{q_0}{U_0} = \frac{q_0}{U_0} + \varepsilon \frac{q_0}{U_0}$$

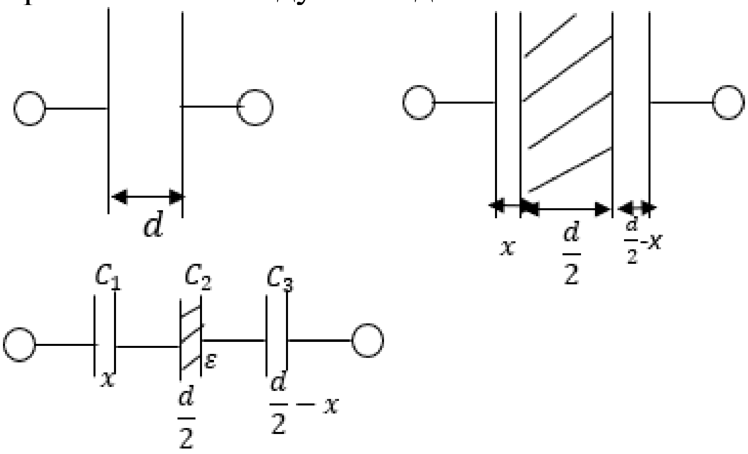
$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_0}(1+\varepsilon)$$

$$(1+\varepsilon) = \frac{U_0}{U}$$

$$\varepsilon = \frac{U_0}{U} - 1$$

Пример 4.15.

Как изменится емкость C_0 плоского конденсатора, если между его обкладками будет вдвинута пластинка из диэлектрика (ε)? Толщина пластинки равна половине расстояния между обкладками.



$$C_0 = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

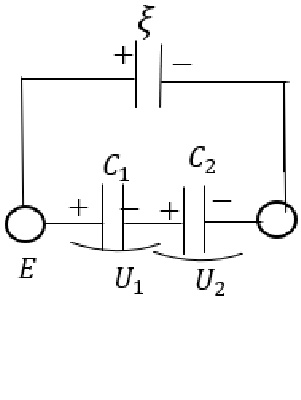
Можно рассмотреть данную систему, как три последовательно соединенных конденсатора.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{x}{S\varepsilon_0} + \frac{d}{2S\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{\frac{d}{2} - x}{S\varepsilon_0} = \frac{d}{2S\varepsilon_0}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$$

$$C = \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon + 1)}$$

Пример 4.16.

Конденсаторы емкостью C_1 и C_2 соединили последовательно и подключили к источнику ЭДС E. Найти заряды и напряжения на конденсаторах.



$$\begin{cases} 0 = -q_1 + q_2 \\ \xi = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = q_2 \\ \xi = \frac{q_1 C_2 + q_1 C_1}{C_1 C_2} \end{cases}$$

$$\xi = \frac{q_1(C_2 + C_1)}{C_1 C_2}$$

$$q_1 = q_2 = \frac{\xi C_1 C_2}{(C_1 + C_2)}$$

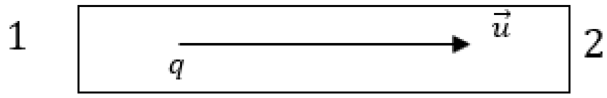
$$U_1 = \frac{C_2 \xi}{(C_1 + C_2)}$$

$$U_2 = \frac{C_1 \xi}{(C_1 + C_2)}$$

4.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

4.2.1. Основные положения

- Направленное движение свободных носителей заряда.



Сила тока – скалярная физическая величина, численно равная заряду, прошедшему через поперечное сечение проводника за единицу времени.

$I = \frac{q}{\Delta t}$ $[A]$

Плотность тока – векторная физическая величина, численно равная заряду, прошедшему через единичную поверхность, перпендикулярную скорости направленного движения носителей заряда $\vec{u}$, за единицу времени. Направление вектора плотности тока совпадает с вектором скорости направленного движения положительных носителей заряда $\overrightarrow{e_u}$.

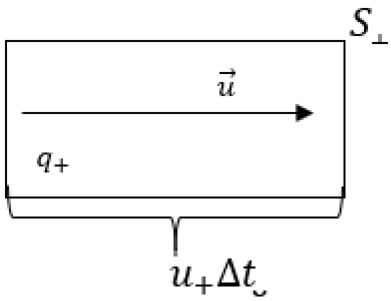
$\vec{j} = \frac{I}{S_\perp}\overrightarrow{e_u}$

$$\vec{j} = \frac{I}{S_\perp}\overrightarrow{e_u} = \frac{q}{S_\perp \Delta t}\overrightarrow{e_u}$$

Заряд q, прошедший через поверхность $S_\perp$ за время Δt равен:

$q = q_+{'}N = q_+{'}n_+u_+ = q_+{'}n_+u_+\Delta t S_\perp$

Здесь $q_+{'}$ - величина заряда одного положительного носителя, n_+ - концентрация положительных носителей заряда, u_+ - средняя скорость направленного движения положительных носителей.



$\vec{j} = \frac{q_+{'}n_+U_+\Delta t S_\perp}{S_\perp \Delta t}\overrightarrow{e_U} = q_+{'}n_+U_+\overrightarrow{e_U}$

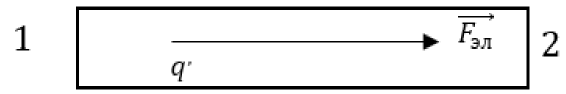
$\vec{j} = q_+{'}n_+\overrightarrow{U_+}$

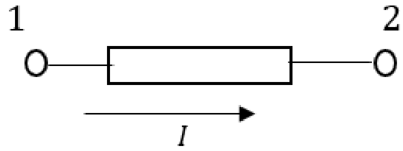
Если ток создается “+” и “-” носителями

$\vec{j} = q_+{'}n_+\overrightarrow{U_+} - q_-{'}n_-\overrightarrow{U_-}$

4.2.2. Закон Ома для однородного участка электрической цепи

Однородный участок- это участок, в котором на свободные носители заряда действуют только электрические силы





$\overrightarrow{F_{эл}} = q'\vec{E}$

$I = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2)$

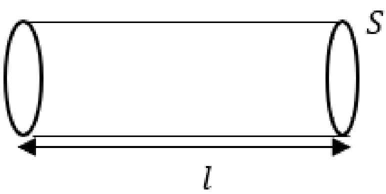
R[Ом]≡[Ω] Сопротивление

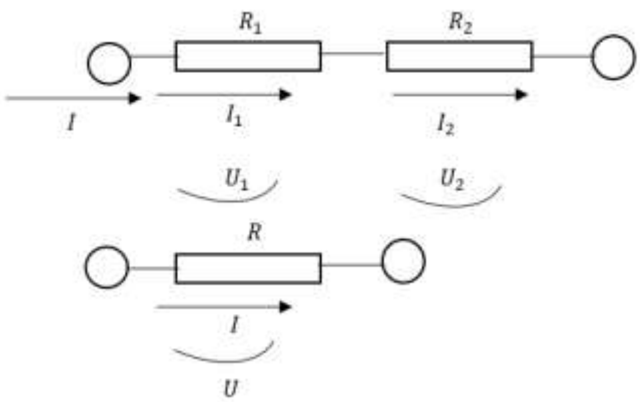
R зависит только от формы, геометрических размеров и материала проводника

Для цилиндрических проводников

$R = \frac{\rho l}{S}$

4.2.3. Последовательное соединение проводников

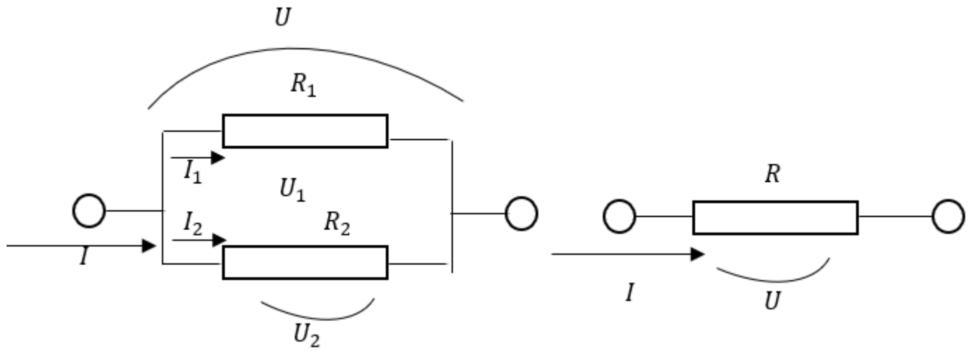




$I_1 = I_2 = I; U = U_1 + U_2; I = \frac{U}{R}$

$R = R_1 + R_2$

4.2.4. Параллельное соединение проводников

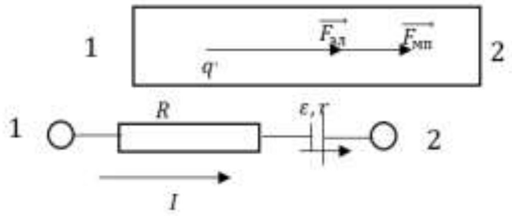


$I_1 + I_2 = I; U = U_1 = U_2; I = \frac{U}{R}$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

4.2.5. Закон Ома для неоднородного участка электрической цепи

Неоднородный участок электрической цепи - это участок, в котором на свободных носителях заряда кроме электрических сил действуют силы, имеющие не электрическую природу



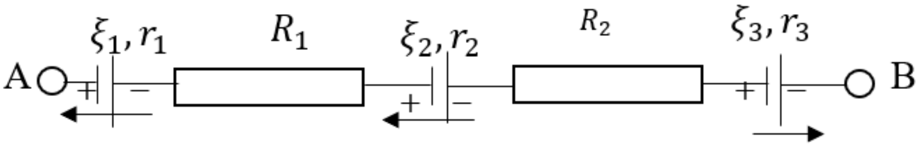
$I = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \xi}{R + r}$

Правило написания закона Ома

1. Определяется с направлением тока
2. Из потенциала точки, из которой ток вытекает «1», вычитаем потенциал точки, в которую ток втекает «2» (из начальной вычитаем конечную)
3. ЭДС пишем с плюсом, если направление ЭДС совпадает с направлением тока

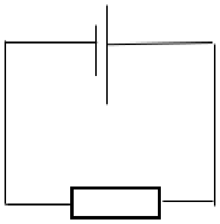
Пример 4.17.

Записать закон Ома для следующего участка электрической цепи, в которой ток течет из точки В в точку А (справа налево)



$I = \frac{\varphi_B - \varphi_A + \xi_1 + \xi_2 - \xi_3}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3}$

4.2.6. Закон Ома для замкнутой электрической цепи



I=$\frac{\xi}{R+r}$.

Вспомним определение разности потенциалов в электростатическом поле – это работа электрических сил по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2, отнесенная к величине этого заряда:

$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{эл\ 1\to2}}{q}; [B]$.

Так как на неоднородном участке на заряд q действуют не только электрические, но и неэлектрические силы, то введем понятие ЭДС:

$\xi_{12} = \frac{A_{нэ\ 1\to2}}{q}; [B]$.

Обратим внимание, что размерность ЭДС такая же как и у разности потенциалов, т.е $[B]$.

Напряжение (падение напряжения) – это суммарная работа как электрических, так и неэлектрических сил по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2, отнесенная к величине этого заряда

$$U = \frac{A_{эл\ 1\to2} + A_{нэ\ 1\to2}}{q}; [B]$$

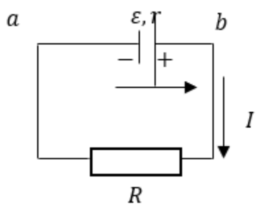
$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi$$

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi$$

$$U = IR$$

Пример 4.18.

В простейшей замкнутой электрической цепи, состоящей из источника ЭДС ξ, с внутренним сопротивлением r и сопротивления нагрузки R, найти разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$



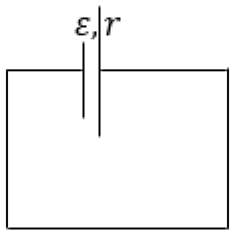
$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \xi}{r}$$

$$I = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R} => \varphi_b > \varphi_a$$

$$Ir - \varepsilon = \varphi_a - \varphi_b$$

$$\varphi_b - \varphi_a = \varepsilon - Ir$$

Током короткого замыкания, называется ток, текущий через источник ЭДС, если сопротивление нагрузки равно 0.



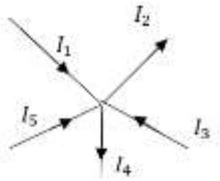
$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$$

<u>Узел</u> электрической цепи – это точка, в которой сходится более двух проводников

4.2.7. <u>I Правило Кирхгоффа</u>

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле равна 0.

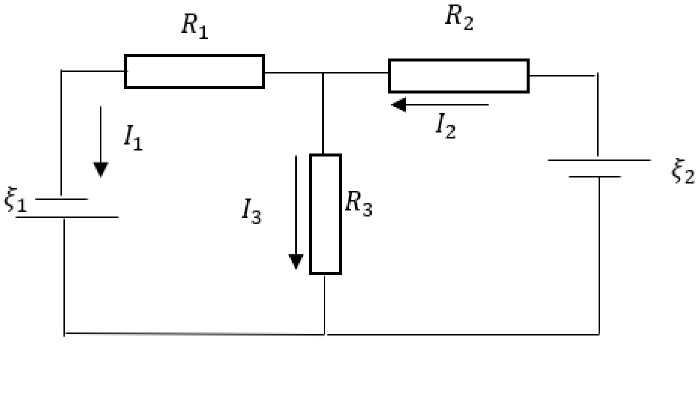
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$



$$I_1 + I_3 + I_5 = I_2 + I_4$$

Пример 4.19.

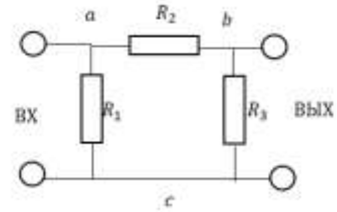
В схеме, показанной на рисунке, э.д.с. ξ_1 и ξ_2 известны, сопротивления R_1, R_2 и R_{1} даны. Найти токи во всех ветвях цепи.

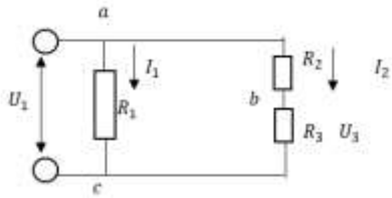


$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ I_1 = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b + \xi_1}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{\varphi_b - \varphi_a + \xi_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b}{R_3} \end{cases}$$

Пример 4.20.

Если на вход электрической цепи подано напряжение U_1=100 В, то напряжение на выходе U_3=40 В. При этом через сопротивление R_2 идет ток I_2=1 А. Если на выход цепи подать напряжение U_3'=60 В, то напряжение на входе окажется равным U_1'=15 В. Определить величины сопротивлений R_1, R_2 и R_3.

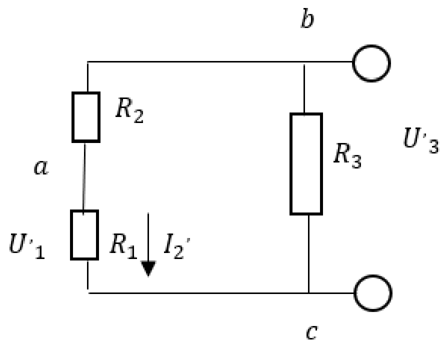




Мы перерисовали исходную электрическую схему при условии, что входное напряжение U_1 подается между точками a и c, а выходное U_3, снимается между точками b и c. Запишем законы Ома для участков b и c и a и

$$I_2 = \frac{U_3}{R_3}$$

$$I_2 = \frac{U_1 - U_3}{R_2}$$



Нарисуем электрическую схему при условии, что входное напряжение U_3' подается между точками b и c, а выходное U_1', снимается между точками a и c. Запишем закон Ома для участков b и a и b и c.

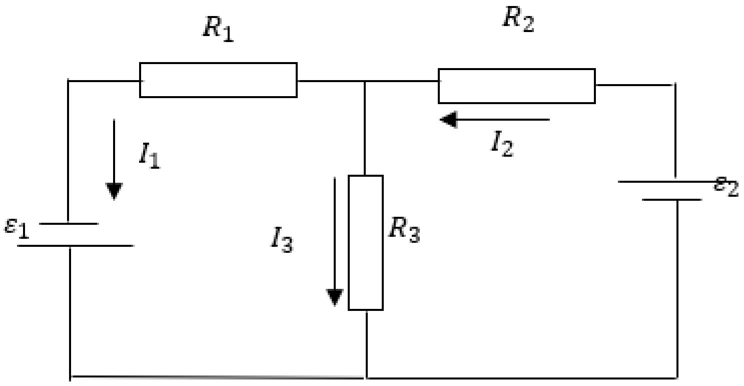
$$I_{2'} = \frac{U_3' - U'_1}{R_2}$$

$$I_{2'} = \frac{U'_1}{R_1}$$

$$R_3 = \frac{U_3}{I_2}$$

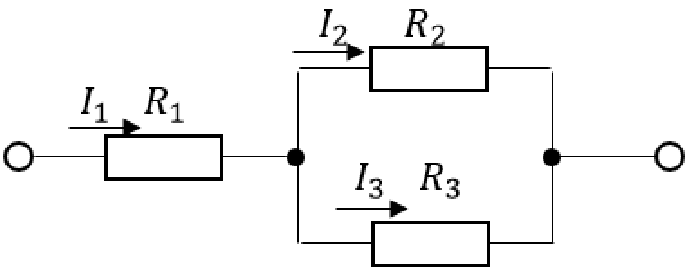
$$R_2 = \frac{U_1 - U_3}{I_2}$$

$$R_1 = \frac{U'_1}{U'_3 - U'_1}\frac{U_1 - U_3}{I_2}$$



$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ I_1 = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b + \varepsilon_1}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{\varphi_b - \varphi_a + \varepsilon_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{\varphi_a - \varphi_b}{R_3} \end{cases}$$

Пример 4.21.



$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}$$
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}$$
$$I_3 = \frac{U_3}{R_3}$$
$$U_3 = U_2 = I_3R_3$$

$$I_2 = \frac{I_3R_3}{R_2}$$
$$I_1 = \frac{I_3R_3}{R_2} + I_3$$
$$U_1 = U_2 = U_3$$
$$U_1 = (\frac{I_3R_3}{R_2} + I_3)R_1$$
$$U = U_1 + U'$$

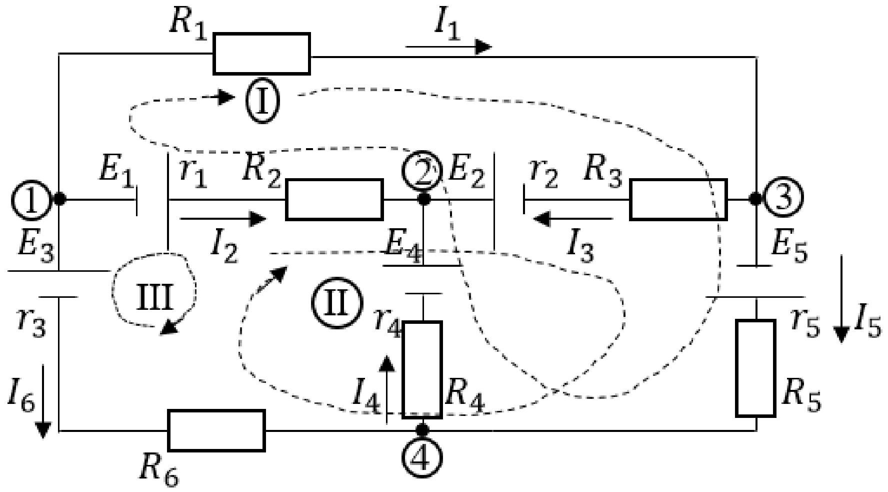
$$U = \frac{I_3R_3R_1}{R_2} + I_3R_1 + I_3R_3 = \frac{I_3R_3R_1 + I_3R_1R_2 + I_3R_3R_2}{R_2} = \frac{I_3(R_3R_1 + R_1R_2 + R_3R_2)}{R_2}$$

4.2.8. II правило Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.

$$\sum_{i=1}^{N} I_iR_i = \sum_{j=1}^{M} E_j$$

Пример 4.22.



Количество уравнений по I правилу Кирхгофа на одно меньше, чем количество узлов.

$0 = I_1 + I_2 + I_6$

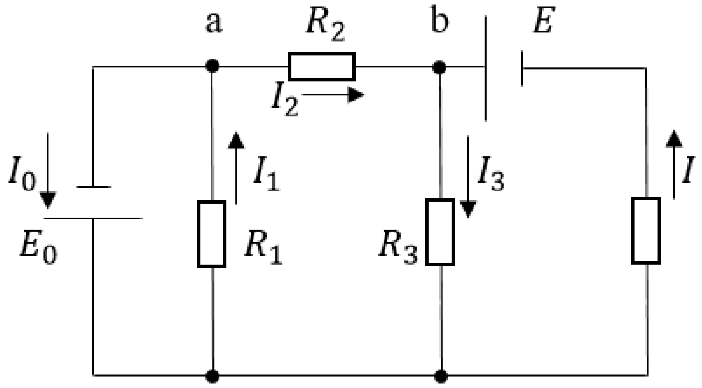
$0 = I_2 + I_3 + I_4$

$I_1 + I_5 = I_3$

$I_1R_1 - I_5(R_5 + r_5) + I_4(R_4 + r_4) - I_2(R_2 + r_2) = E_5 + E_4 - E_1$

$I_2(R_2 + r_1) - I_3(R_3 + r_2) - I_5(R_5 + r_5) - I_6(R_6 + r_3) = E_1 - E_2 - E_5 + E_3$

$I_2(R_2 + r_1) - I_4(R_4 + r_4) - I_6(R_6 + r_3) = E_1 - E_4 + E_3$



1) b: $I_2 + I = I_3$

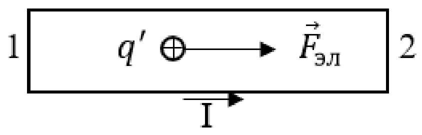
c: $I_0 + I_3 = I_1 + I$

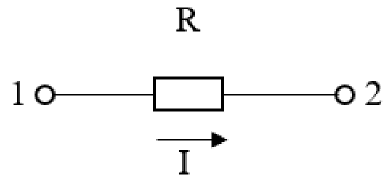
4) $I_1R_1 = E_0$

3) $I_2R_2 + I_3R_3 + I_1R_1 = 0$
2) $-IR - I_3R_3 = E$

4.2.9. Работа электрического тока

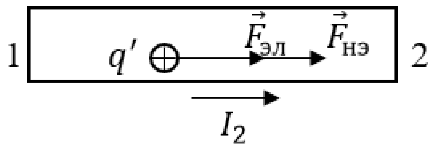
1) В однородном участке

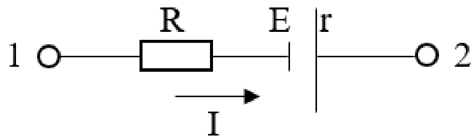




$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)I\Delta t$
$A_{тока} = I(\varphi_1 - \varphi_2)t$

2) Неоднородный участок





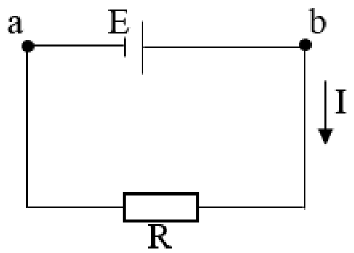
$A_{тока} = A_{эл} + A_{нэ} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + qE = q(\varphi_1 - \varphi_2 + E) = IT(\varphi_1 - \varphi_2 + E)$
$A_{тока} = I(\varphi_1 - \varphi_2 + E)t$
$A_{тока} = IUT$

4.2.10. Мощность

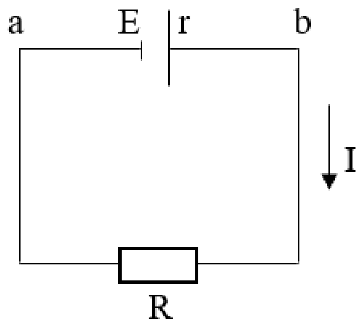
$$N = \frac{A}{t}$$
$N_{тока} = IU$

КПД

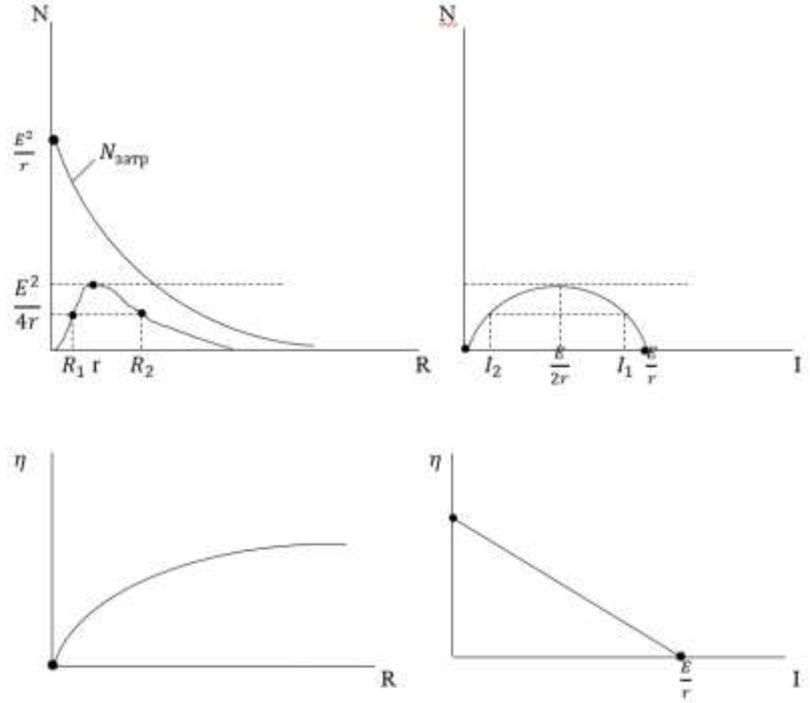
$$\eta = \frac{A_{полезн}}{A_{затр}} \qquad \eta = I\,\frac{(\varphi_b - \varphi_a)t}{IEt}$$

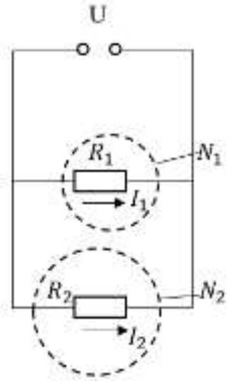


Пример 4.23.

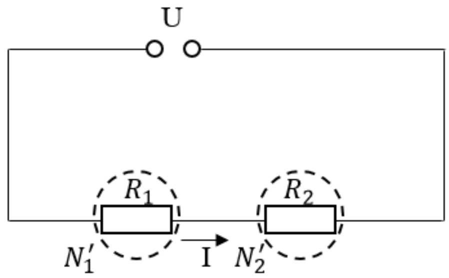


$$N = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$
$$N = I(\varphi_1 - \varphi_2) = I^2 R$$
$$I = \frac{E}{R + r}$$
$$N_п(R) = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$
$$R = \frac{E}{R} - r$$
$$N_п(I) = I^2 \left(\frac{E}{R} - r\right) = EI - I^2 R$$
$$N_з(I) = EI$$
$$N_з(R) = \frac{E^2}{R + r}$$
$$\eta(R) = \frac{E^2 R}{(R + r)^2} \frac{R + r}{E^2} = \frac{R}{R + r}$$
$$\eta(I) = \frac{EI - I^2 R}{EI} = 1 - \frac{Ir}{E}$$
$$N' = \frac{E^2((R + r)^2 - 2R(R + r))}{???} = 0$$
$$(R + r)(R + r - 2R) = 0$$
$$(r - R) = 0$$
$$R = r$$
$$N_{п\,max}(R) = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}$$



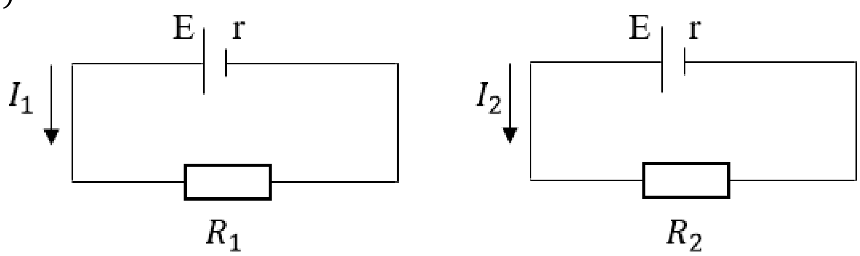


$$N_1 = \frac{U^2}{R_1}$$
$$Q_1 = N_1 t$$
$$N_2 = \frac{U^2}{R_2}$$
$$Q_2 = N_2 t$$

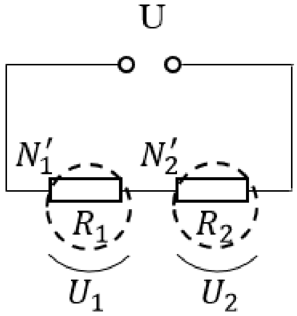


$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$
$$N_1' = I^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$

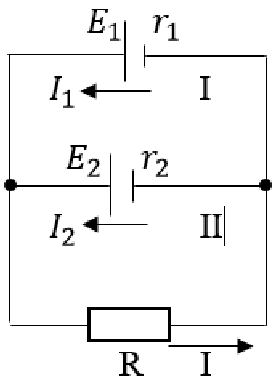
$$N_2' = I^2R_2 = \frac{U^2R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$
$$Q_1 = N_1't$$
$$Q_2 = N_2't$$
$$R_1 = \frac{U^2}{N_1}\,;\ R_2 = \frac{U^2}{N_2}$$
$$N_1' = \frac{U^2}{(\frac{U^2}{N_1} + \frac{U^2}{N_2})^2}\frac{U^2}{N_1} = \frac{1}{(\frac{N_1 + N_2}{N_1N_2})^2}\frac{1}{N_1} = \frac{N_1N_2^2}{(N_1 + N_2)^2}$$
$$N_2' = \frac{N_2N_1^2}{(N_1 + N_2)^2}$$
$$N_1t = \frac{N_1N_2^2}{(N_1 + N_2)^2}t_1$$
$$N_2t = \frac{N_2N_1^2}{(N_1 + N_2)^2}t_2$$



$$N_1 = I_1^2R_1$$
$$N_1 = \frac{E^2}{(r + R_1)^2}R_1$$
$$N_2 = I_2^2R_2$$
$$N_2 = \frac{E^2}{(r + R_2)^2}R_2$$
$$I_1 = \frac{E}{r + R_1}$$
$$\frac{E^2R_1}{(r + R_1)^2} = \frac{E^2R_2}{(r + R_2)^2}$$
$$I_1 = \frac{E}{r + R_2}$$
$$R_1(r^2 + 2R_2r + R_2^2) = R_2(r^2 + 2R_1r + R_1^2)$$
$$R_1r^2 + 2R_1R_2r + R_1R_2^2 = R_2r^2 + 2R_1R_2r + R_2R_1^2$$
$$R_1r^2 - R_2r^2 = R_2R_1^2 - R_1R_2^2$$
$$r^2(R_1 - R_2) = R_1R_2(R_1 - R_2)$$
$$r = \sqrt{R_1R_2}$$



$$N_1 = \frac{U^2}{R_1}$$
$$R_1 = \frac{U^2}{N_1}$$
$$N_2 = \frac{U^2}{R_2}$$
$$R_2 = \frac{U^2}{N_2}$$
$$U = U_1 + U_2$$
$$I = \frac{U}{\frac{U^2}{N_1} + \frac{U^2}{N_2}}$$
$$N_1' = \frac{U_1^2}{R_1}$$
$$N_2' = \frac{U_2^2}{R_2}$$
$$N_1' = I^2 R_1$$
$$N_1' = \frac{U^2 \frac{U^2}{N_1}}{(\frac{U^2}{N_1} + \frac{U^2}{N_2})^2} = \frac{\frac{1}{N_1}}{(\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2})^2} = \frac{N_1^2 N_2^2}{N_1 (N_1 + N_2)^2}$$
$$N_2' = I^2 R_2$$
$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$



$$I = I_1 + I_2$$
I: $-I_1 r_1 + I_2 r_2 = -E_1 + E_2$
$$I_1 r_1 = I_2 r_2 + E_1 - E_2$$
II: $-I_2 r_2 - IR = -E_2$
$$I_1 r_1 = E_2 - IR + E_1 - E_2$$
$$I_2 r_2 = E_2 - IR$$
$$I_2 = \frac{E_2 - IR}{r_2}$$
$$I_1 = \frac{E_1 - IR}{r_1}$$
$$I = \frac{E_2 - IR}{r_2} + \frac{E_1 - IR}{r_1}$$

$$I = \frac{E_2 r_1 - IRr_1 + E_1 r_2 - IRr_2}{r_1 r_2}$$

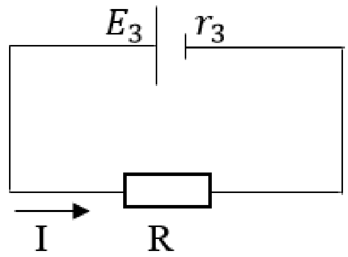
$$0 = -\frac{Ir_1 r_2 + E_2 r_1 + E_1 r_2 - IRr_1 - IRr_2}{r_1 r_2}$$

$$0 = -\frac{E_2 r_1 + E_1 r_2 - I(r_1 r_2 + Rr_1 + Rr_2)}{r_1 r_2}$$

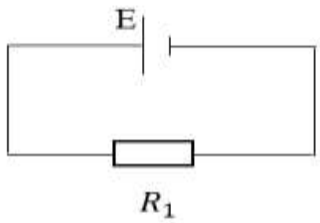
$$I = \frac{E_2 r_1 + E_1 r_2}{r_1 r_2 + Rr_1 + Rr_2}$$

$$I_1 = \frac{E_1 - \left(\frac{E_2 r_1 + E_1 r_2}{r_1 r_2 + Rr_1 + Rr_2}\right) R}{r_1}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - \left(\frac{E_2 r_1 + E_1 r_2}{r_1 r_2 + Rr_1 + Rr_2}\right) R}{r_2}$$

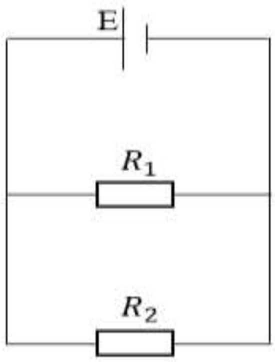


$$I = \frac{E_3}{r_3 + R}$$



$$N_0 = \frac{E^2}{R_1}$$

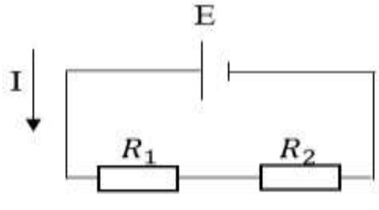
$$R_1 = \frac{E^2}{N_0} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$N = E^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$N = N_0 + \frac{E^2}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{E^2}{N - N_0}$$

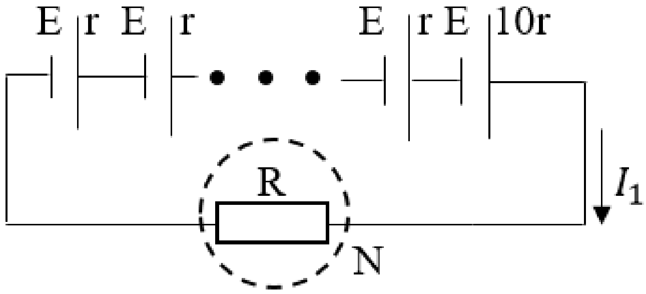


$$N' = \frac{E^2}{R_1 + R_2}$$

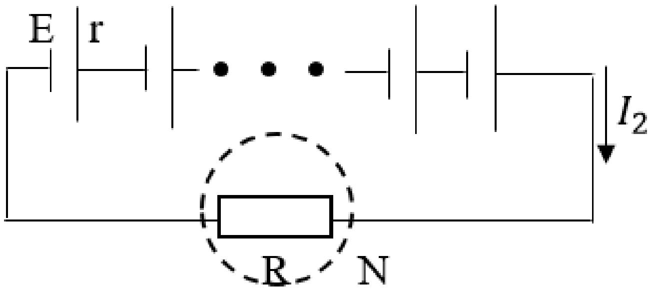
$$N' = \frac{E^2}{\frac{E^2}{N_0} + \frac{E^2}{N - N_0}} = \frac{1}{\frac{N - N_0 + N_0}{N_0(N - N_0)}} = \frac{N_0(N - N_0)}{N}$$

$$N_1' = I^2 R_1$$

$$N_1' = \frac{E^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$
$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$
$$N_1' = \frac{E^2 \frac{\mathrm{E}^2}{N_0}}{(\frac{\mathrm{E}^2}{N_0} + \frac{\mathrm{E}^2}{N - N_0})^2} = \frac{\frac{1}{N_0}}{(\frac{N}{N_0(N - N_0)})^2} = \frac{N_0(N - N_0)^2}{N^2}$$



$$N = I_1^2 R$$
$$I_1 = \frac{nE}{(n-1)r + 10r + R} \qquad (n-1)$$



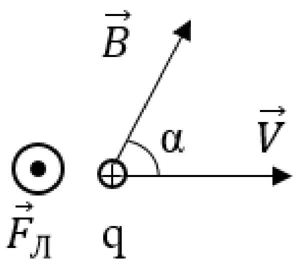
$$N = I_2^2 R$$
$$I_2 = \frac{(n-1)E}{(n-1)r + R}$$
$$I_1 = I_2$$
$$\frac{nE}{(n-1)r + 10r + R} = \frac{(n-1)E}{(n-1)r + R}$$
$$\frac{n}{(n+9)r + R} = \frac{(n-1)}{(n-1)r + R}$$
$$\big((n+9)r + R\big)(n-1) = n((n-1)r + R)$$
$$(n+9)(n-1)r + R(n-1) = (n-1)rn + Rn$$
$$(n+9)(n-1)r - (n-1)rn = Rn - R(n-1)$$
$$(n-1)\big((n+9)r - nr\big) = R$$
$$(n-1)9r = R$$

4.3. МАГНИТОСТАТИКА

4.3.1. Основные положения

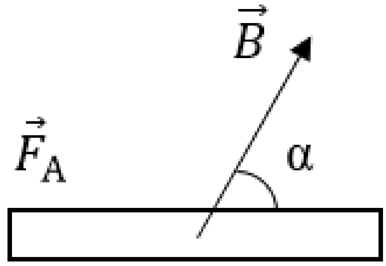
Магнитное поле действует:
1) на движущийся электрический заряд
2) на проводник с током (F)
3) ориентирующее действие на рамку с током
4) ориентирующее действие на постоянный магнит
Источники магнитного поля:
1) движущийся заряд
2) проводник с током
3) постоянный магнит
4) переменное электрическое поле
$\vec{B}$ – индукция магнитного поля [Тл]

4.3.2. Сила, с которой МП действует на движущийся точечный электрический заряд (Сила Лоренца)



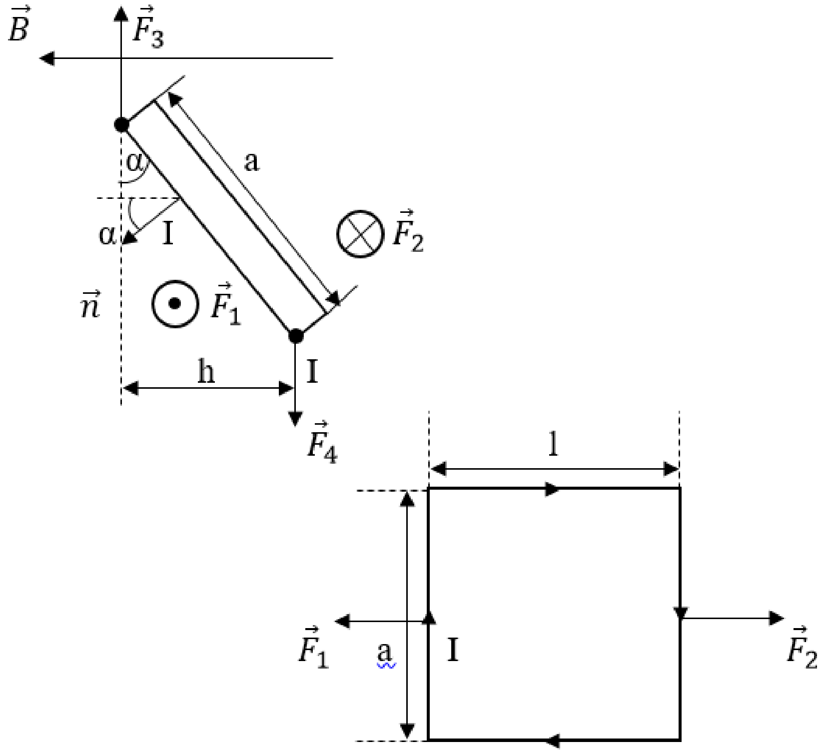
$\vec{F}_Л = q[\vec{V},\vec{B}]$
$\vec{F}_Л = qVB\sin\alpha$
$\vec{F}_Л \perp \vec{B}$

4.3.3. Сила, с которой МП действует на проводник с током (Сила Ампера)



$\vec{F}_А = I[\vec{l},\vec{B}]$
$F_А = ILB\sin\alpha$
$\vec{F}_А \perp \vec{B}$, $\vec{F}_А \perp$ проводу

4.3.4. Момент сил, действующих на рамку с током



$F_1 = F_2 = IaB \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$F_3 = F_4 = IlB \sin\frac{\pi}{2} = IlB$

F_3 и F_4 – пара сил, их момент:

$M = F_3 h$

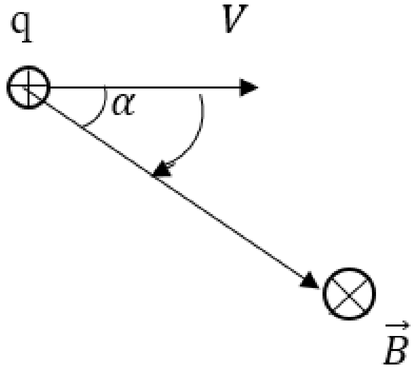
h - плечо пары сил

$M = IlBa \sin\alpha = IBS \sin\alpha$

$S = ab$

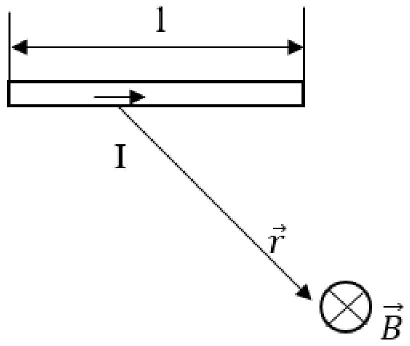
$M = ISB \sin\alpha$

4.3.5. МП, создаваемое движущимся электрическим зарядом (Закон Био-Савара-Лапласа)

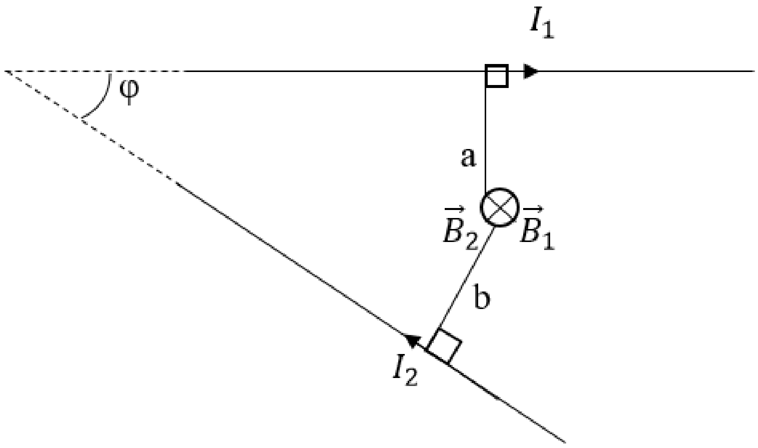


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{V},\vec{r}]}{r^3}$$

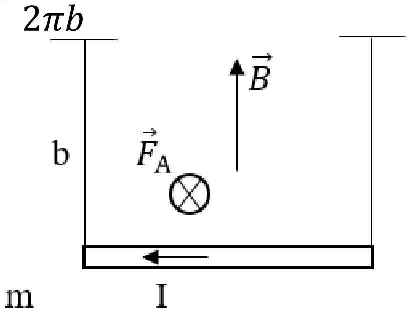
4.3.6. МП, создаваемое прямолинейным проводником с током (Закон Био-Савара-Лапласа)

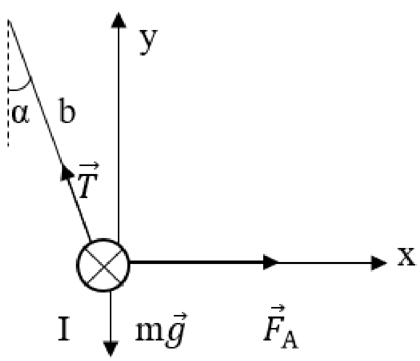


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\vec{l},\vec{B}]}{r^2}$$



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$
$$B = B_1 + B_2$$
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}$$



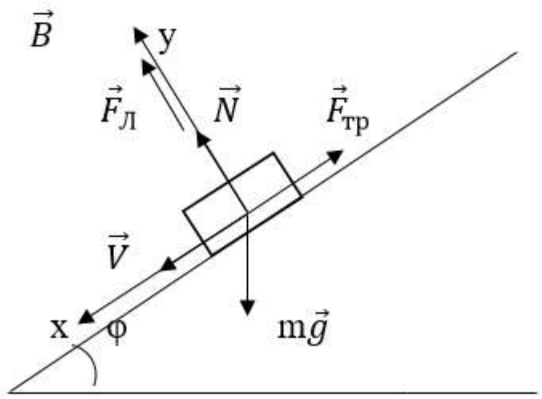


$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T}$$

$$F_A = BIl\sin\frac{\pi}{2} = BIl$$

x: $0 = BIl - T\sin\alpha$

y: $T\cos\alpha = mg$



Условие: $V_{max} \to a = 0$

$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_Л;$

$\vec{F}_Л = q[\vec{V}, \vec{B}];$ x: $0 = mg\sin\varphi - F_{тр};$

$F_Л = qVB\sin\frac{\pi}{2};$ y: $0 = -mg\cos\varphi + N + F_Л;$ $N = mg\cos\varphi - qVB$

$F_Л = qVB;$ $F_{тр} = kN;$ $F_{тр} = \mu(mg\cos\varphi - qVB)$

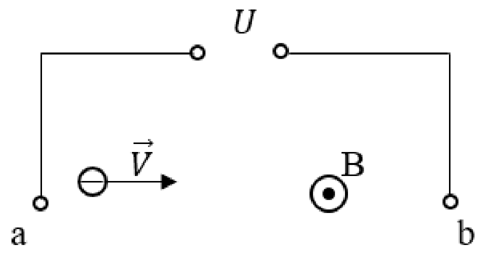
$F_Л = qVB;$ $mg\sin\varphi = kN$

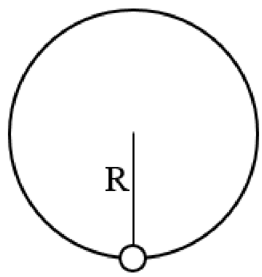
$N = \frac{mg\sin\varphi}{k}$ $V = \frac{mg\cos\varphi - \frac{mg\sin\varphi}{k}}{qB}$

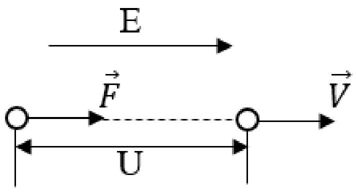
$mg\cos\varphi - F_Л = \frac{mg\sin\varphi}{k}$ $V = \frac{mg\,(k\cos\varphi - \sin\varphi)}{kqB} = V_{max}$

$$mg\cos\varphi - \frac{mg\sin\varphi}{k} = F_Л$$

$$mg\sin\varphi = \mu mg\cos\varphi - \mu qVB$$





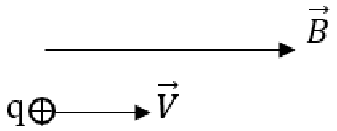


$\vec{F}_Л = q[\vec{V}, \vec{B}]$ $U = \varphi_a - \varphi_b$

4.3.7. Движение точечного заряда в однородном МП

q, V, B, m

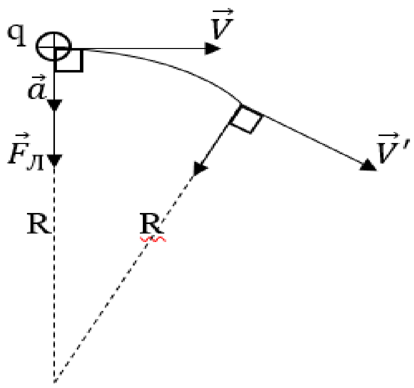
1) $\vec{V} \parallel \vec{B}$



$\vec{a} = 0$ => $\vec{F}_Л = q[\vec{V}, \vec{B}] = 0$

Движение равномерное прямолинейное

2) $\vec{V} \perp \vec{B}$



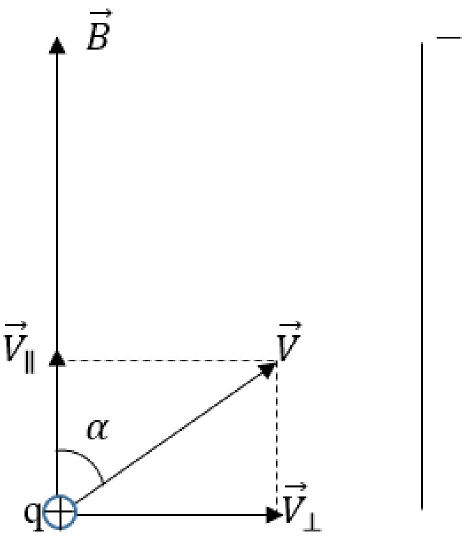
Движение равномерное по окружности

$\mathrm{m}\vec{a} = \vec{F}_Л$ $\frac{mV^2}{R} = qVR$

Период

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

3) $\vec{V}$ сост α с $\vec{B}$



$V_\perp = V \sin\alpha$ $V_\parallel = V\cos\alpha$

Движение равномерное по спирали

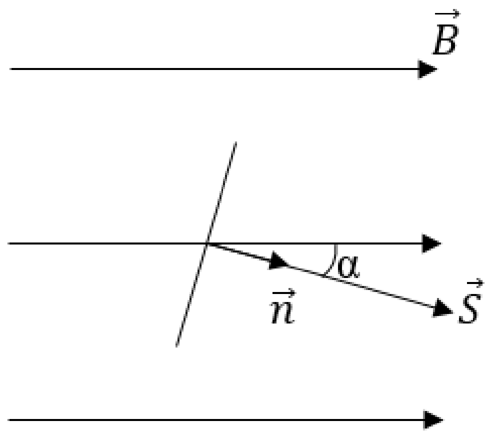
$$R = \frac{mV_{\perp}}{qB} = \frac{mV\sin\alpha}{qB}$$

$$T = 2\pi\frac{m}{qB}$$

Шаг спирали

$$h = V_{\parallel}T = \frac{2\pi mV\cos\alpha}{qB}$$

Поток вектора $\vec{B}$



$$\vec{S} = S\vec{n}$$

$$\Phi_B = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha$$

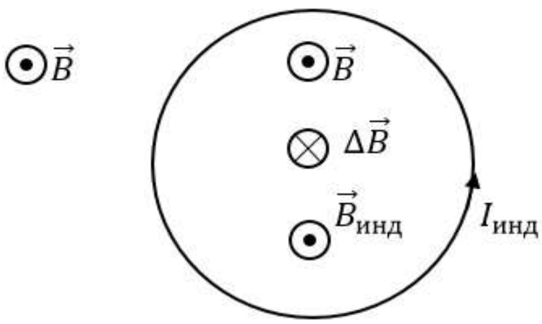
$$I \sim \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

$$E_L = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

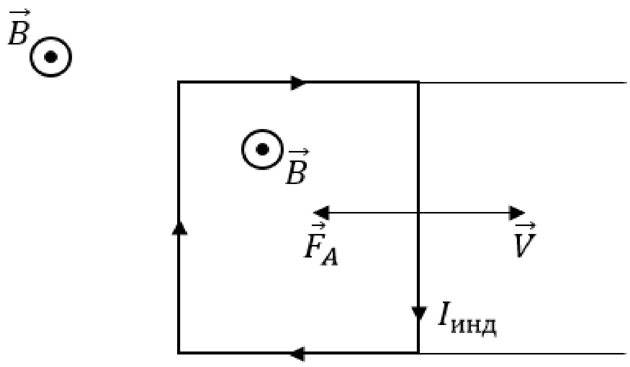
Направление тока определяется с помощью правила Ленца:

Индукционный ток направлен таким образом, чтобы противодействовать причине его вызвавшей.

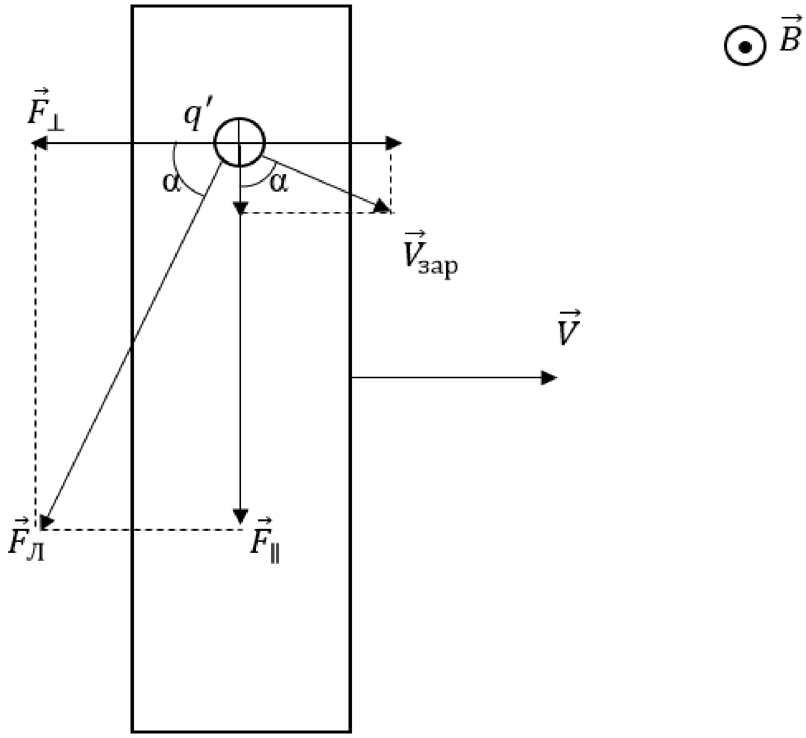
Пример МП уменьшается



Пример 2 Площадь контура



Разность потенциалов, возникающая в прямолинейном проводнике, движущемся в однородном МП с постоянной скоростью



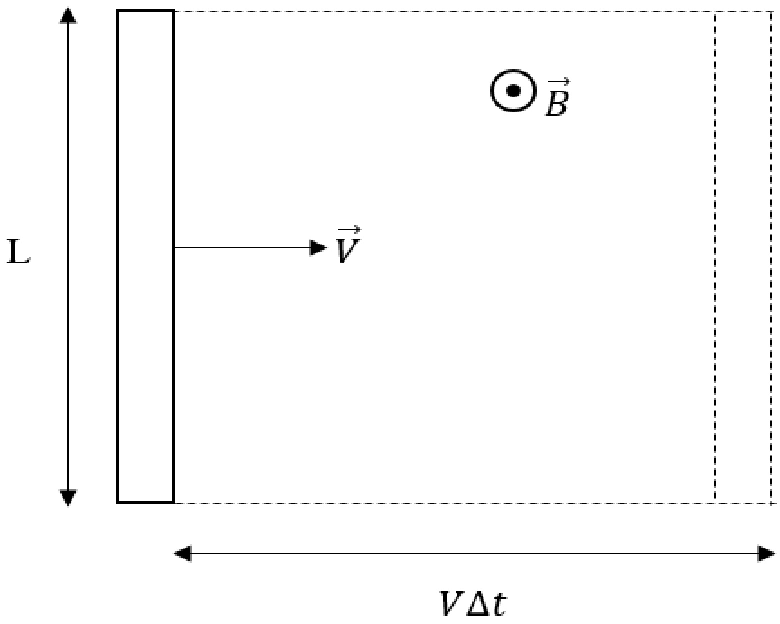
$$E = \frac{A_\parallel}{q'} = \frac{F_\parallel L}{q'} = \frac{F_Л \sin\alpha\, L}{q'} = V_{зар} B \sin\alpha L$$

$$E = BLV$$

$$A_\parallel > 0$$

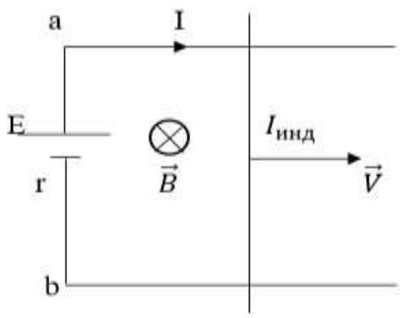
$$A_\perp < 0$$

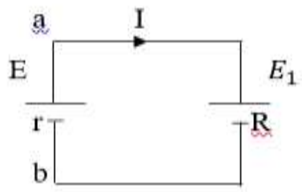
$$A_\parallel + A_\perp = 0$$



$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{BS}{\Delta T} = BLV$$

Пример 4.26.

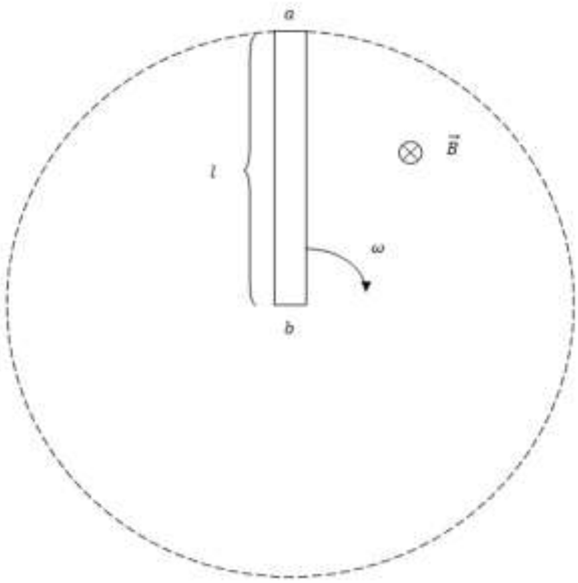




$$E_1 = BLV$$
$$I = \frac{E - E_1}{R + r}$$

Пример 4.27.

В однородное магнитное поле индукции В помещен прямолинейный проводник длины l, вращающийся с постоянной скоростью ω вокруг оси, проходящей через один из его концов в плоскости, перпендикулярной линиям индукции МП. Найти разность потенциалов, возникающую на краях проводника.



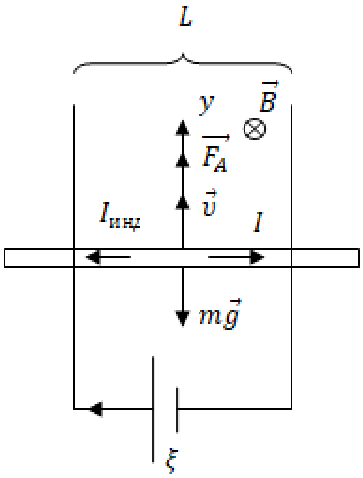
$$\varepsilon_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t};$$

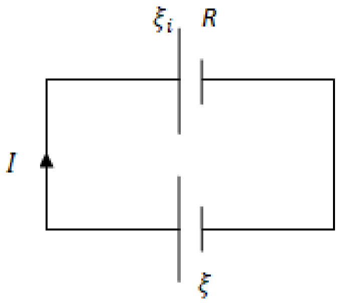
За время равное периоду проводник прочерчивает круг площадью πl^2

$$\Delta\Phi = B \cdot \pi l^2 - 0;$$
$$\Delta t = T = \frac{2\pi l}{v} = \frac{2\pi}{\omega};$$
$$\varepsilon_i = \frac{B \cdot \pi l^2 \cdot \omega}{2\pi};$$
$$\varepsilon_i = \frac{B l^2 \cdot \omega}{2}.$$

Пример 4.28.

По двум вертикальным проводящим стержням движется вверх с постоянной скорость V горизонтальный проводник, имеющий массу M и сопротивление R. Стержни закреплены на расстоянии L друг от друга и соединены у земли источником э.д.с. Перпендикулярно плоскости движения проводника приложено постоянное однородное магнитное поле с индукцией B. Найти величину э.д.с. источника. Сопротивлением стержней и источника, а также трением в системе пренебречь.





ЭДС индукции, возникающая в подвижном проводнике $\varepsilon_i = BLv$, индукционный ток противонаправлен току источника:

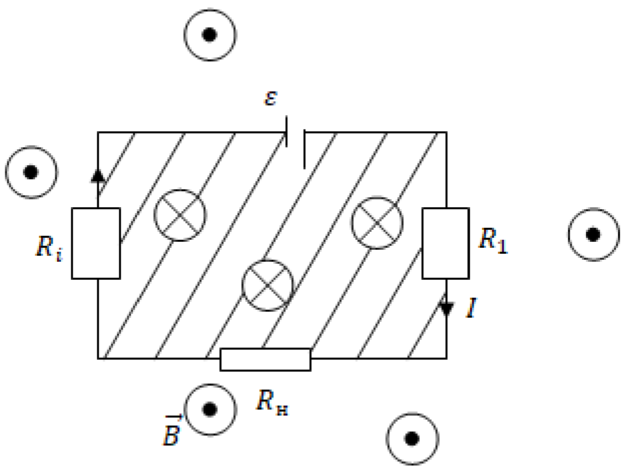
$$I = \frac{\xi - \xi_i}{R};$$

Скорость движения проводника максимальна (постоянна), когда его ускорение равно 0

$$0 = F_A - mg;$$
$$F_A = I \cdot L \cdot B;$$
$$\xi = \frac{mgR + B^2L^2V}{BL}.$$

4.3.8. Самоиндукция

Рассмотрим замкнутый контур, каждый проводник в этом контуре создает свое собственное магнитное поле, которое в любой точке поверхности, опирающейся на контур направлено в одну сторону. Обратим внимание, что магнитное моле, создаваемое проводником с током – пропорционально току $B{\sim}I$, текущему в этом проводнике. Таким образом существует отличный от нуля поток вектора B через площадь контура и $\Phi_B{\sim}I$.



4.3.9. Индуктивность

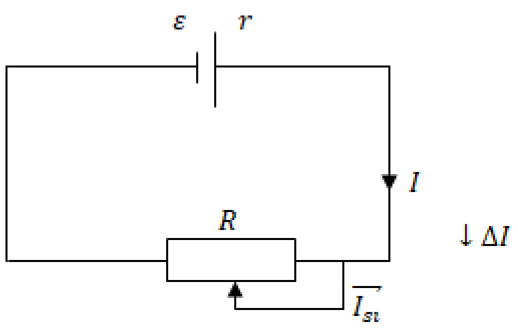
Можно ввести коэффициент пропорциональности между потом и током L.
$\Phi_B = LI$.

Этот коэффициент пропорциональности называется индуктивностью контура.

$L = \frac{\Phi_B}{I} = [\text{Гн}]$.

Индуктивность L зависит от формы, геометрических размеров контура и материала среды, в которой находится контур.

4.3.10. Самоиндукция



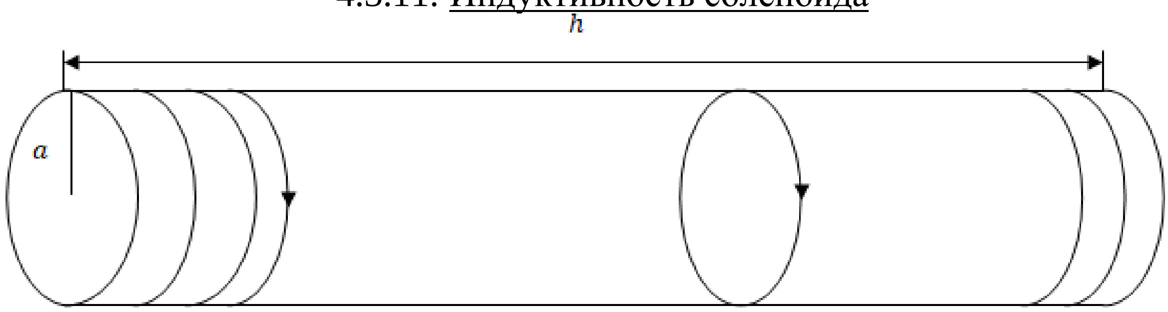
I-изменяется
$\Rightarrow \Phi_B$ - меняется
$\Rightarrow \varepsilon$ - самоиндукции

$$\varepsilon_{si} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t};$$

При условии, что L=const

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

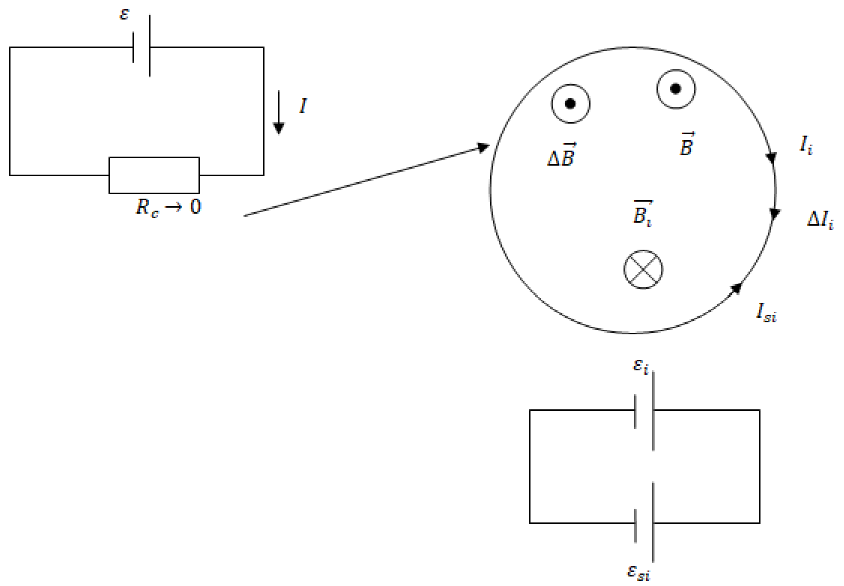
4.3.11. Индуктивность соленоида



Поле внутри бесконечно длинного цилиндрического соленоида однородно, направлено вдоль оси соленоида и равно:
$B = \mu_0 nI$;
где $n = \frac{N}{h}$ - количество витков на единицу длины
Поток вектора В через один виток соленоида равен:
$\Phi_B = B \cdot \pi a^2 = \mu_0 n\pi a^2 I$;
Потокосцепление – суммарный поток через все витки:

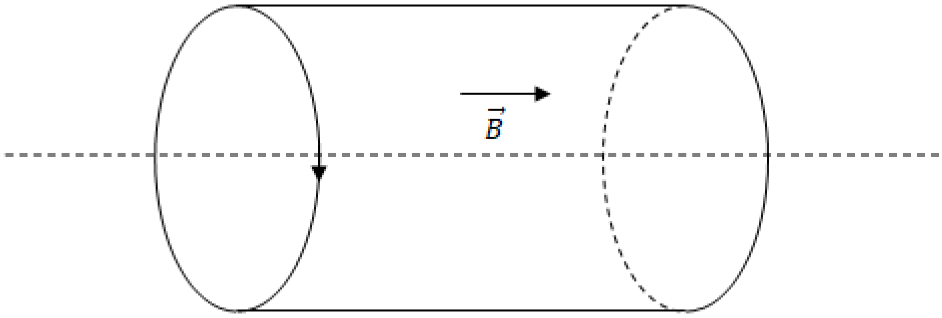
$$\psi = \sum \Phi_B\,;$$
$$\psi = \Phi_B \cdot N = \mu_0 \frac{N}{h} \cdot \pi a^2 \cdot N \cdot I;$$
$$\psi = \mu_0 \frac{N^2}{h} \cdot \pi a^2 I;$$
$$\psi = \frac{\mu_0 N^2}{h^2} \cdot \pi a^2 \cdot h \cdot I;$$
$$\psi = \mu_0 n^2 \cdot V \cdot I;$$
$$L = \frac{\psi}{I};$$
$$L = \mu_0 n^2 V.$$

4.3.12. Сверхпроводимость



$$I = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{si}}{R_c};$$
$$IR_c = 0 \Rightarrow \varepsilon_{si} = \varepsilon_i.$$

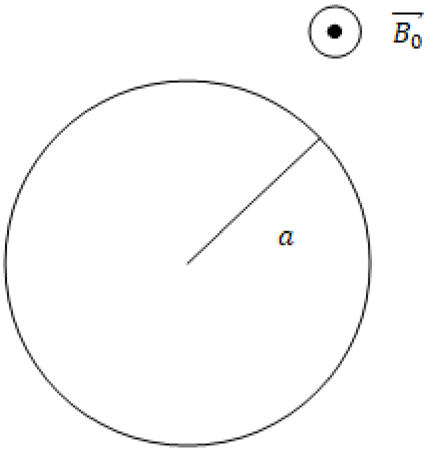
4.3.13. Энергия Магнитного поля



$$L = \mu_0 n^2 V;$$
$$W_м = \frac{LI^2}{2}.$$

Пример 4.29.

Проволочное кольцо диаметром d, имеющее сопротивление R, помещено в изменяющееся со временем магнитное поле, перпендикулярное его плоскости. Магнитная индукция возрастает линео за время t_1 от нуля до B_0, а затем за время t_2 линейно уменьшается до нуля. Какое количество теплоты выделится в кольце?



$$\varepsilon\xi_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t};$$

$$\Delta\Phi_1 = B_0 \cdot \pi a^2 = B_0 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} =$$

$$= B_0\pi \cdot 0{,}25d^2;$$

$$\Delta t = t_1;$$

$$\varepsilon_{i1} = \frac{B_0\pi \cdot 0{,}25d^2}{t_1};$$

$$\xi_{i2} = \frac{B_0\pi \cdot 0{,}25d^2}{t_2};$$

$$Q_1 = N_1 \cdot t_1;$$

$$N_1 = I_1^2 \cdot R;$$

$$I_1 = \frac{\xi_i}{R} = \frac{B_0\pi \cdot 0{,}25d^2}{t_1 R};$$

$$N_1 = \frac{B_0^2\pi^2(0{,}25d^2)^2}{t_1^2 \cdot R^2} \cdot R = \frac{B_0^2\pi^2(0{,}25d^2)^2}{t_1^2 \cdot R};$$

$$Q_1 = \frac{B_0^2\pi^2(0{,}25d^2)^2}{t_1 R};$$

$$Q_2 = \frac{B_0^2\pi^2(0{,}25d^2)^2}{t_2 R};$$

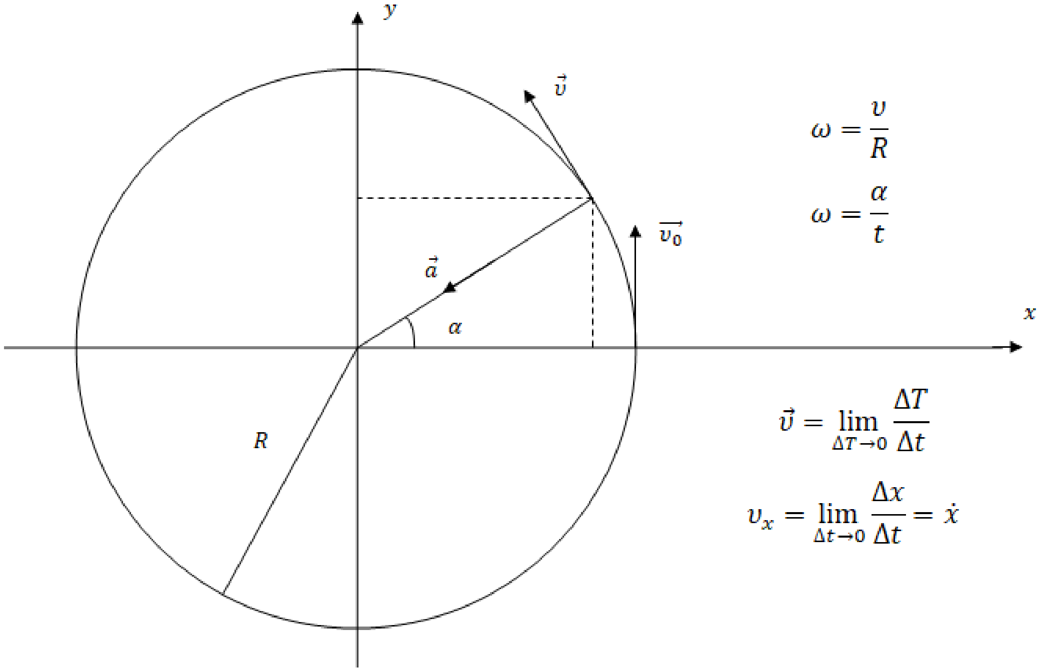
$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{B_0^2\pi^2(0{,}25d^2)^2 \cdot (t_1 + t_2)}{t_1 t_2 R}.$$

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

5.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha)\,;$$

5.1.1. Равномерное движение по окружности, как колебательный процесс



$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

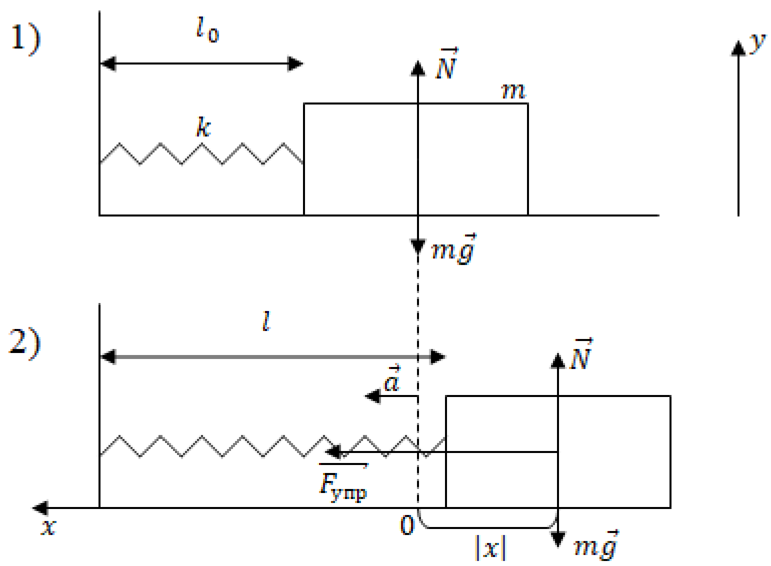
$$\vec{v} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}$$

$x(t) = R\cos\alpha = R\cos\omega t\,;$
$y(t) = R\sin\alpha = R\sin\omega t\,;$
$v_x(t) = \dot{x}(t) = -R\omega\sin\omega t\,;$
$v_y(t) = (t) = \mathrm{R\omega cos}\,\omega t\,;$
$a_x(t) = \dot{v_x}(t) = \ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos\omega t\,;$
$a_y(t) = \dot{v_y}(t) = \ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin\omega t\,;$
$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t);$
$\ddot{y}(t) = -\omega^2 \cdot y(t).$

Уравнение гармонических колебаний
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0;$

Пример 5.1.
Пружинный маятник



Начало координат выбираем по положению равновесия.

1) $0 = m\vec{g} + \vec{N}$;   2)$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{упр}}$;

$y:\quad mg = N \; x : ma = F_{упр}$;

$y : 0 = -mg + N$;

$m\ddot{x} = k|l - l_0|$;

$|l - l_0| = |x| = -x$;

$m\ddot{x} = -kx$;

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$;

$x(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$;

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

a_0 и α ищем из начальных условий

$x(t = 0) = x_0$;

$v_x(t = 0) = v_0 v_x = \dot{x} = -a_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$;

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \cos\alpha \cos\alpha = \dfrac{x_0}{a_0} \\ v_0 = -a_0\omega_0 \sin\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{v}{x_0\omega_0} \end{cases};$$

$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}$;

$\dfrac{x_0^2}{a_0^2} + \dfrac{v_0^2}{a_0^2\omega_0^2} = 1$;

$a_0 = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}$.

5.1.2. Энергия гармонических колебаний

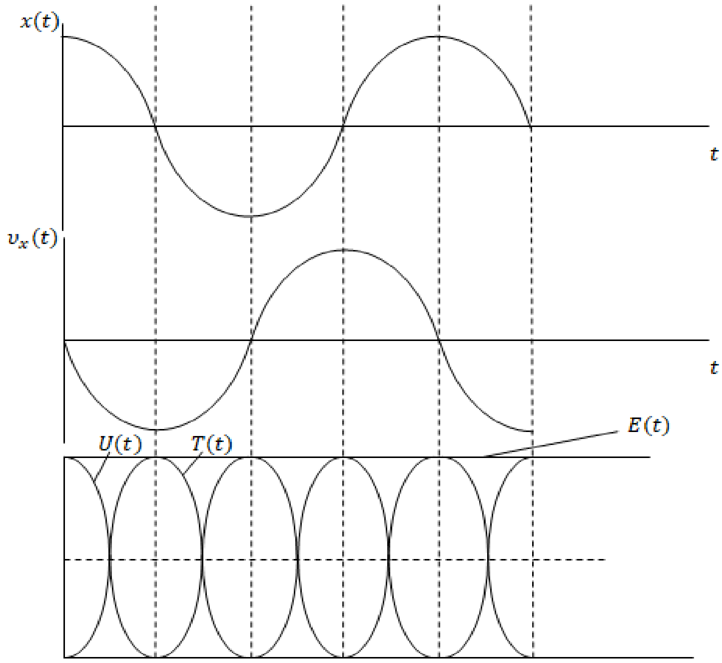
$T = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{ma_0^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$;

$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$;

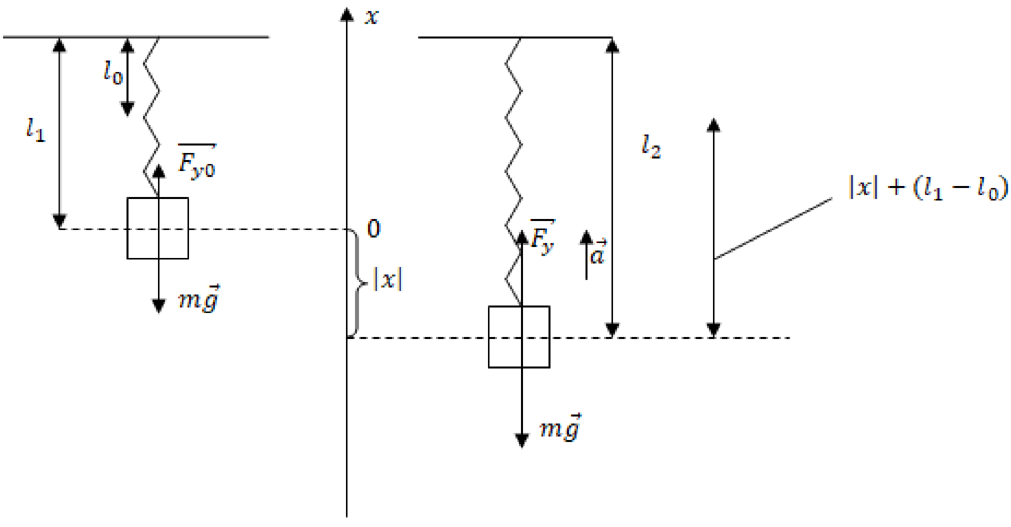
$T_m = \frac{ma_0^2\omega_0^2}{2} U_m = \frac{ka_0^2}{2}$;

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $E = U(t) + T(t) = \frac{ka_0^2}{2} \Rightarrow T_m = U_m$;

$\alpha = 0$.



Пример 5.2.



l_0–длина нерастянутой пружины, l_1- длина пружины в положении равновесия, l_2 – длина деформированной пружины

$0 = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{y0}}$; $\qquad m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_y}$;

$0 = -mg + k|l_0 - l_1|$; $\qquad m\ddot{x} = -mg + k|l_2 - l_0|$;

$k(l_1 - l_0) = mg$; $\qquad m\ddot{x} = -mg + k\big(|x| + (l_1 - l_0)\big)$;

$m\ddot{x} = -mg + k|x| + k(l_1 - l_0);$

$m\ddot{x} = -kx;$ $\qquad |x| = -x \quad (x < 0);$

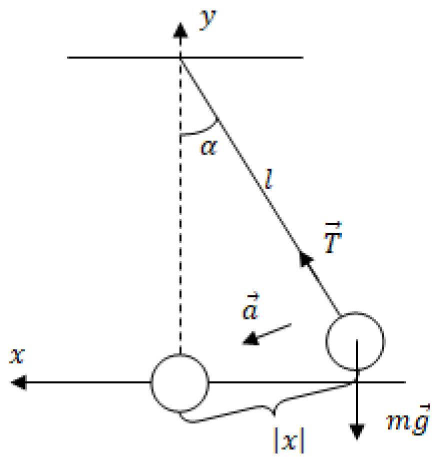
$\ddot{x} = \frac{k}{m}x = 0;$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$

5.1.3. Математический маятник

- это тело массой m, подвешенное на длинной нити, совершающей колебания, максимально отклонение не превышает $5° - 7°$ градусов

Пример 3



$\sin\alpha \approx \alpha$ [рад]

$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ [рад]

$\cos\alpha \approx 1$

$m\vec{a} = m\vec{a} + \vec{T};$

$x:\ m\ddot{x} = T\sin\alpha\,;$

$y: 0 = -mg + T\cos\alpha\,;$

$\begin{cases} m\ddot{x} = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases} \div \ \frac{\ddot{x}}{g} = \operatorname{tg}\alpha\,;$

$\operatorname{t}g\,\alpha \approx \sin\alpha = \frac{|x|}{l};$

$\frac{\ddot{x}}{g} = \frac{|x|}{l};$

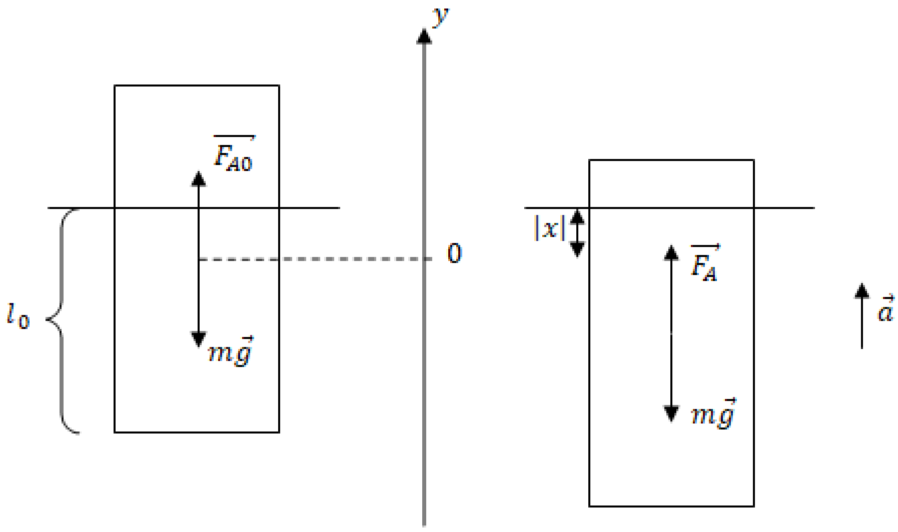
$x < 0 \Rightarrow |x| = -x;$

$\frac{\ddot{x}}{g} = -\frac{x}{l};$

$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0;$

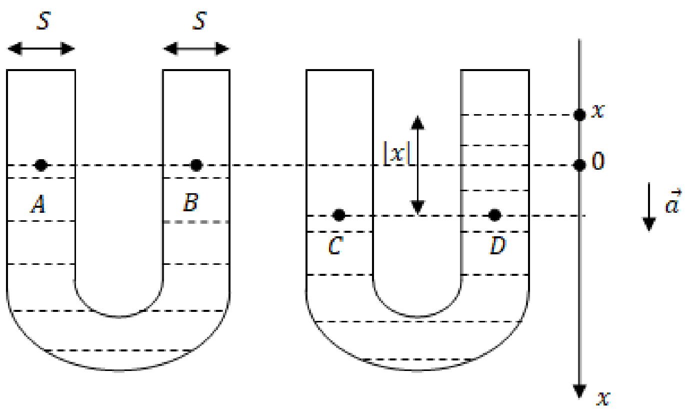
$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}};$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$

Пример 5.3.
С какой частотой будет колебаться палка массой m и площади поперечного сечения S, плавающая на поверхности воды в вертикальном положении?



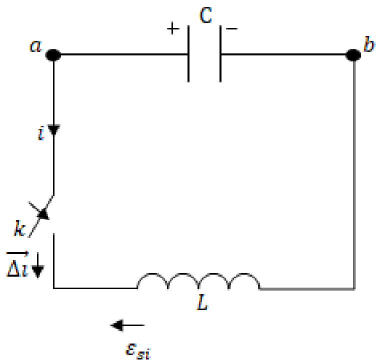
$0 = \overrightarrow{F_{A0}} + m\vec{g};$
$F_{A0} = mg;$
$\rho g \cdot S \cdot l_0 = mg;$
$m\vec{a} = \overrightarrow{F_A} + m\vec{g};$
$m\ddot{x} = \rho g \cdot S \cdot (l_0 + |x|) - mg;$
$m\ddot{x} = \rho g S l_0 + \rho g S|x| - mg;$
$|x| = -x;$
$m\ddot{x} = -\rho g S x;$
$\ddot{x} + \frac{\rho g S}{m} x = 0;$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}};$

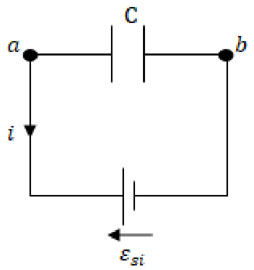
Пример 5.4.
В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найти период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда и соединительной трубки равна S. Масса ртути m, ее плотность ρ.



$$P_C = \frac{mg}{S};$$
$$P_D = \frac{mg}{S} + \rho g|x|;$$
$$ma = \Delta mg;$$
$$\Delta m = \rho \cdot S \cdot 2|x|;$$
$$m\ddot{x} = -\rho g S 2x;$$
$$\ddot{x} + \frac{\rho g S 2}{m}x = 0;$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho g S}{m}}.$$

5.1.4. Свободные электрические колебания





$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

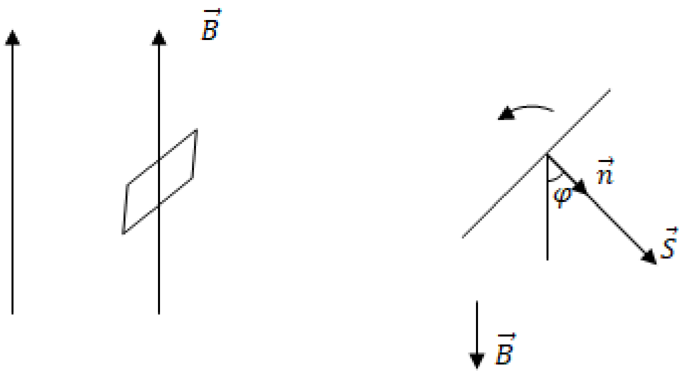
$$iR = \varphi_a - \varphi_b - \varepsilon_{si};$$
$$0 = \varphi_a - \varphi_b - L(i)';$$
$$\varepsilon_{si} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = L \cdot (i)' = L\ddot{q}(-1);$$
$$(i)' = \frac{|\Delta q|}{\Delta t};$$
$$i = \dot{q}(-1);$$
$$C = \frac{q}{\varphi_a - \varphi_b} \quad \Rightarrow \quad \varphi_a - \varphi_b = \frac{q}{C};$$
$$0 = \frac{q}{C} + L\ddot{q};$$
$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0;$$
$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$
$$i(t) = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$
$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi);$$
$$W_м = \frac{Li^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi);$$
$$W_{Эm} = \frac{q_0^2}{2C};$$
$$W_{Мm} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2}{2} \cdot \frac{1}{LC};$$

$W_{\text{М}m} = \dfrac{q_0^2}{2C};$

$W = W_э + W_м = \dfrac{q_0^2}{2C} = const.$

5.1.5. Источник переменного электрического тока

В однородное магнитное поле поместим замкнутый контур, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной линиям индукции МП.

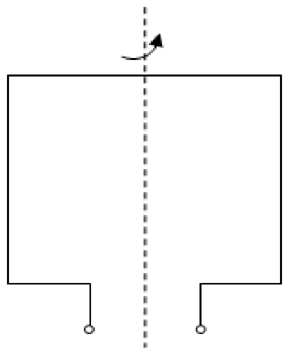


$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos\varphi;$

$\omega = \dfrac{\varphi}{t} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t;$

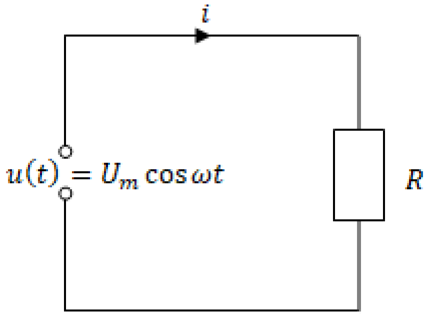
$\Phi_B = BS\cos\omega t;$

$\varepsilon_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dot{\Phi} = BS\omega\sin\omega t;$



Если у рамки сделать выводы, то на них будет переменное напряжение:
$u(t) = BS\omega\sin\omega t;$

1) Сопротивление R подключено к источнику переменного напряжения

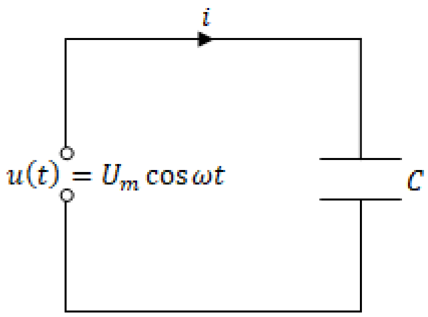


$$iR = u(t);$$
$$i = \frac{u(t)}{R};$$
$$i = \frac{U_m}{R}\cos\omega t;$$

Фаза тока совпадает с фазой напряжения, амплитуда тока связана с амплитудой напряжения:

$$I_m = \frac{U_m}{R};$$

2) Конденсатор Сподключен к источнику переменного напряжения



$$C = \frac{q}{u(t)} \quad \Rightarrow \quad q(t) = C \cdot u(t);$$
$$q(t) = CU_m \cos\omega t;$$
$$i = \dot{q} = -CU_m\omega \sin\omega t;$$
$$i(t) = U_m\omega C \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

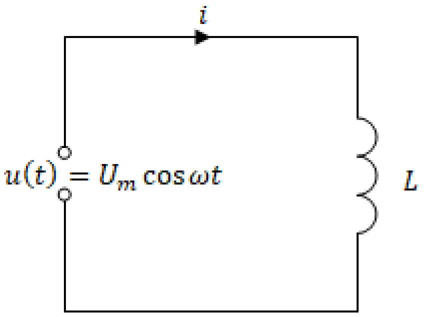
Фаза тока на конденсаторе опережает фазу напряжения на $\frac{\pi}{2}$, амплитуда тока связана с амплитудой напряжения:

$$I_m = U_m \cdot \omega C;$$

Характеристическое емкостное сопротивление:

$$X_C = \frac{1}{\omega C};$$

3) Индуктивность L подключена к источнику переменного напряжения



$$\varepsilon_{si} = -L(i)' = -L \cdot (-\omega) I_m \sin \omega t =$$
$$= I_m \omega L \sin \omega t =$$
$$= I_m \omega L \cos(\omega t - \frac{\pi}{2});$$

Фаза тока в индуктивности отстаёт от фазы напряжения на $\frac{\pi}{2}$, амплитуда тока связана с амплитудой напряжения:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L};$$

Характеристическое емкостное сопротивление:

$$X_L = \omega L;$$

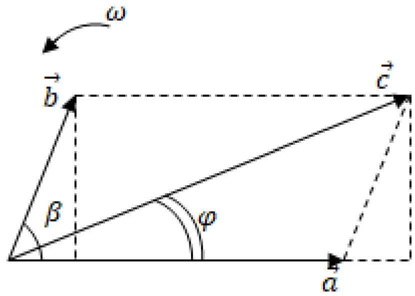
Пример 5.5.

Найти сумму двух гармонических колебаний:

$$x_1(t) = a \cos \omega t;$$
$$x_2(t) = b \cos(\omega t + \beta);$$
$$x = x_1 + x_2;$$
$$x = a \cos \omega t + b \cos(\omega t + \beta) = a \cos \omega t + b(\cos \omega t \cdot \cos \beta - \sin \omega t \cdot \sin \beta) =$$
$$= \cos \omega t \, (a + b \cos \beta) - \sin \omega t \cdot \sin \beta \cdot b;$$
$$A = a + b \cos \beta;$$
$$B = b \sin \beta;$$
$$x = (A \cos \omega t - B \sin \omega t) \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t\right);$$
$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$
$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$
$$x = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t) =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi);$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg}(\frac{b \sin \beta}{a + b \cos \beta});$$
$$x = \sqrt{a^2 + 2ab \cos^2 \beta + b^2} \cos(\omega t + \operatorname{arctg}(\frac{b \sin \beta}{a + b \cos \beta})).$$

5.1.6. Метод векторных диаграмм

Сложим два вектора, вращающихся с одинаковой скоростью, при этом вектор $\vec{b}$ опережает вектор $\vec{a}$ на угол β. Результатом сложения будет вектор $\vec{c}$, вращающийся с той же угловой скоростью.



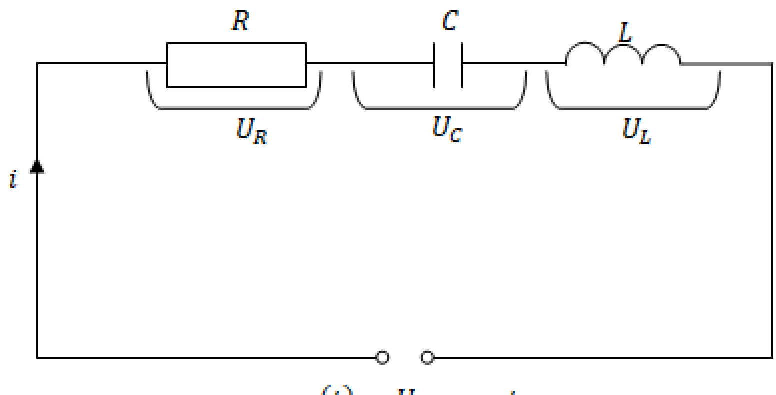
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \beta)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta}$;

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b\sin\beta}{a + b\cos\beta}$.

Для сложения гармонических колебаний, происходящих с одной частотой, мы представляем каждое колебание в виде вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью равной частоте колебаний. Начальная фаза колебаний равна углу, который составляет вектор с нулевым направлением. Величина вектора равна амплитуде колебаний. Производим

5.1.7. Последовательный контур

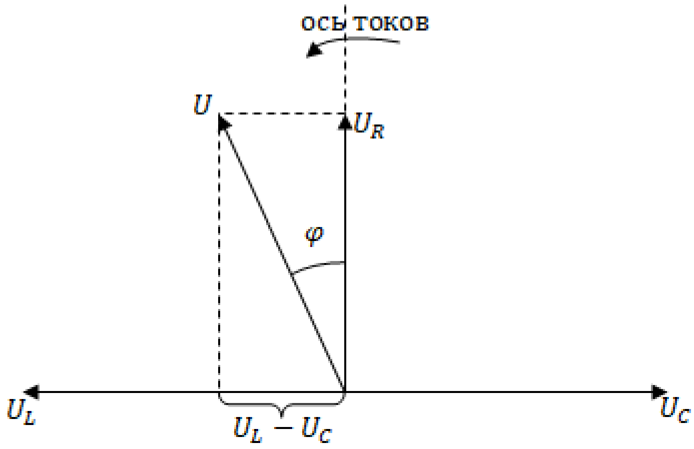
К источнику постоянного напряжения подключим последовательно R,CиL. Ток, который будет течь через все элементы цепи – одинаковый. Напряжение на каждом элементе изменяется по гармоническому закону с частотой источника напряжения.



$u(t) = U_m\cos\omega t$

$u = U_R + U_C + U_L$;

Получили сумму трех гармонических колебаний, которую рассчитаем методом векторных диаграмм:



$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$;

$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{U_L - U_C}{U_R} = \dfrac{I_m\omega L - \dfrac{I_m}{\omega C}}{I_m \cdot R} = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$;

$U_m^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 = I_m^2 R^2 + (I_m\omega L - \dfrac{I_m}{\omega C})^2$;

$U_m^2 = I_m^2 \cdot \left(R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right)$;

$I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$;

Импеданс – полное сопротивление цепи переменного тока (коэффициент пропорциональности между амплитудой тока и напряжения):

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$;

Мощность переменного тока

$p(t) = i(t) \cdot u(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) \cdot U_m \cos \omega t = I_m U_m\{\cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t\}=$

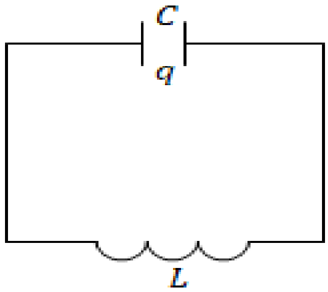
$= I_m U_m\{(\cos \omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi) \cos \omega t\} =$

$= \dfrac{1}{2} I_m U_m\{\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\}$;

$< p(t) >= \boxed{P = \dfrac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi}$.

Пример 5.6.

Заряженный конденсатор замыкается на катушку индуктивности. Через какую наименьшую часть периода колебаний после замыкания энергия в контуре распределится поровну между конденсатором и катушкой? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.



$W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$;

$W_м = \frac{Li^2}{2}$;

$i = \dot{q}$;

$W_{эл} = W_м$;

$\frac{q^2}{2C} = \frac{L\dot{q}^2}{2}$;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$;

$\frac{q^2}{\dot{q}^2} = LC$;

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\dot{q}}{q}$;

$\frac{q}{\dot{q}} = \sqrt{LC}$;

$T = \frac{2\pi \cdot q}{\dot{q}}$;

$W_{эл} = \frac{q_m^2}{2C} \cdot \cos^2 \omega t$;

$W_м = \frac{q_m}{2C} \cdot \sin^2 \omega t$;

$\cos^2 \omega t = \sin^2 \omega t$;

$\mathrm{tg}^2\, \omega t = 1$;

$\omega t = \frac{\pi}{4}$;

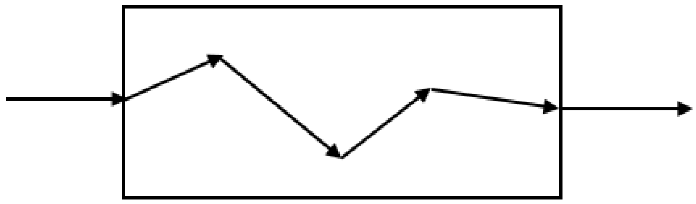
$t = \frac{T}{8}$.

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

6.1. ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

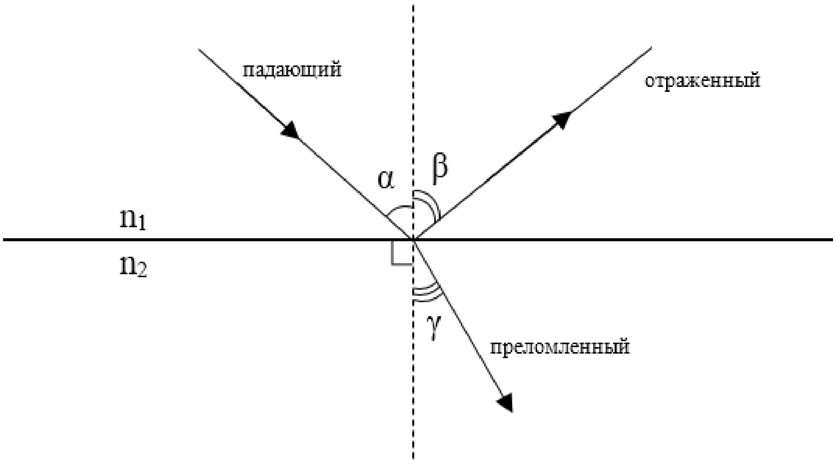
6.1.1. Основные положения

I. О прямолинейности распространения световых лучей.
II. О независимости распределения световых лучей.
III. Об обратимости распространения световых лучей.



IV. Законы отражения и преломления.

1. Падающие, отраженные, преломленные лучи, а также перпендикуляр к границе раздела, восстановленный из точки падения, лежат в одной плоскости.



2. Угол падения равен углу отражения β = α
3. Закон преломления света: $n_1 sin\alpha = n_2 sin\gamma$

n – абсолютный показатель преломления света, показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме:

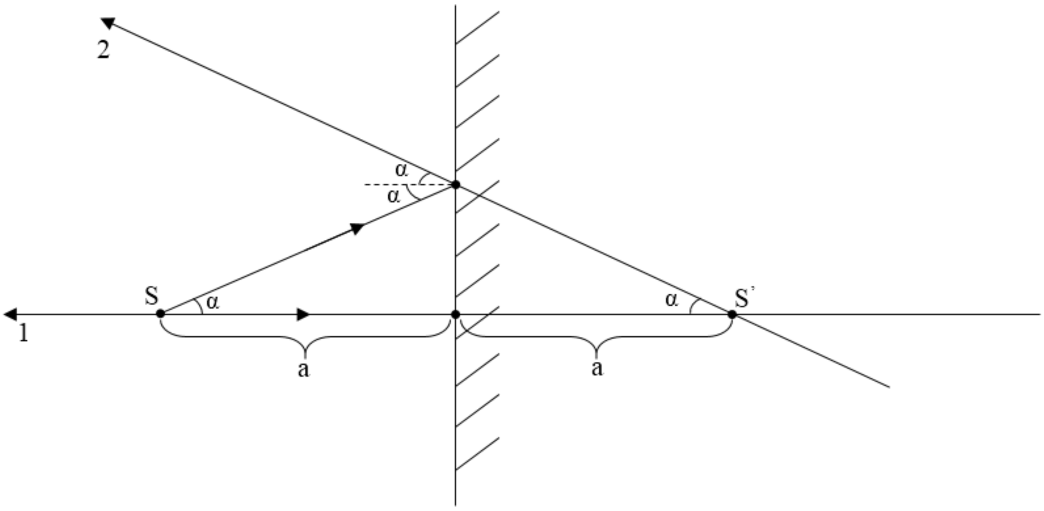
$$V_{\text{света в среде}} = \frac{c}{n}$$

c – скорость света в вакууме.

Изображением светящейся точки в оптической системе является точка пересечения лучей или их продолжений по выходе из оптической системы.

Мнимое изображение получено на пересечении продолжений лучей, а действительное – на пересечении лучей.

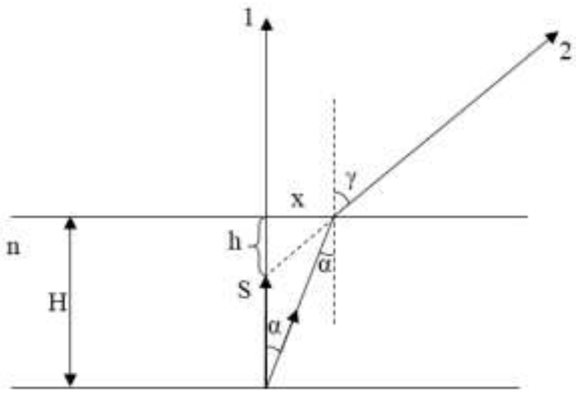
6.1.2. Построение изображения в плоском зеркале



Из точки S направим на зеркало 2 луча, после отражения от зеркала, они не пересекаются, следовательно, действительного изображения не будет. Строим продолжения этих лучей, они пересекаются в точке S’, которая находится за зеркалом на так4ом же расстоянии, как источник.

Пример 6.1.

На какой глубине видит расположенным дно реки наблюдатель, который смотрит на поверхность воды сверху? Глубина реки H, показатель преломления воды n.



Если смотреть на поверхность воды сверху, значит в глаз попадают лучи выходящие из воды под малыми углами, вспомним свойства малых углов:

если $\alpha \to 0$ (малый $5^\circ \to 7^\circ$), то 1) $\alpha[\text{рад}] \approx \sin(\alpha)$, 2) $\alpha[\text{рад}] \approx tg(\alpha)$, 3) $\cos(\alpha) \approx 1$.

Запишем закон преломления, см. рисунок:

$n \cdot \sin(\alpha) = 1 \cdot \sin(\gamma)$

Из рисунка видно:

$$tg(\alpha) = \frac{x}{H}$$

$$tg(\gamma) = \frac{x}{h}$$

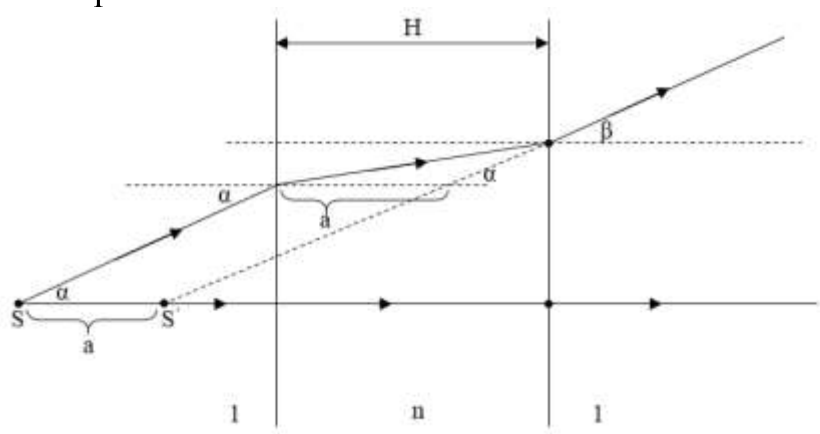
Заменим в законе преломления синусы на тангенсы:

$$n \cdot \frac{x}{H} = 1 \cdot \frac{x}{h}$$

$$h = \frac{H}{n}$$

Пример 6.2.

Найти смещение изображения светящейся точки в плоскопараллельной стеклянной пластинке, расположенной в воздухе, если смотреть на нее под углом, близким к нормали.



Запишем два закона преломления, для двух границ раздела.

$$1 \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \sin(\gamma)$$

$$n \cdot \sin(\gamma) = 1 \cdot \sin(\beta)$$

$$\alpha = \beta$$

Учитывая, что углы α и γ – малые, получаем:

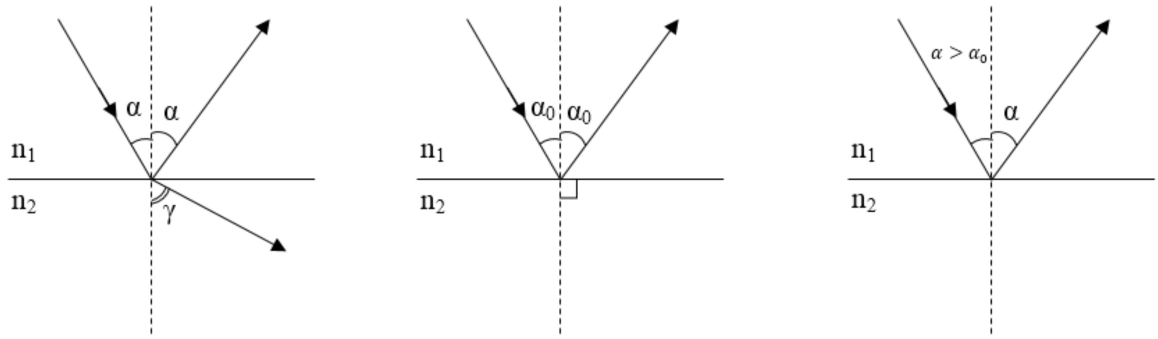
$$tg(\gamma) = \frac{x}{H} \qquad tg(\alpha) = \frac{x}{H - a}$$

$$\frac{x}{H - a} = n \cdot \frac{x}{H}$$

$$H - a = \frac{H}{n}$$

$$a = H - \frac{H}{n}$$

6.1.3. <u>Явление полного внутреннего отражения</u>



При падении света из оптически более плотной среды на границу раздела с оптически менее плотной средой, получается, что угол преломления больше угла падения, и при определенном значении угла падения α_0 угол преломления равен $\frac{\pi}{2}$, при любом угле падения $\alpha > \alpha_0$, преломленного луча не будет и вся энергия падающего света пойдет в отраженный луч.

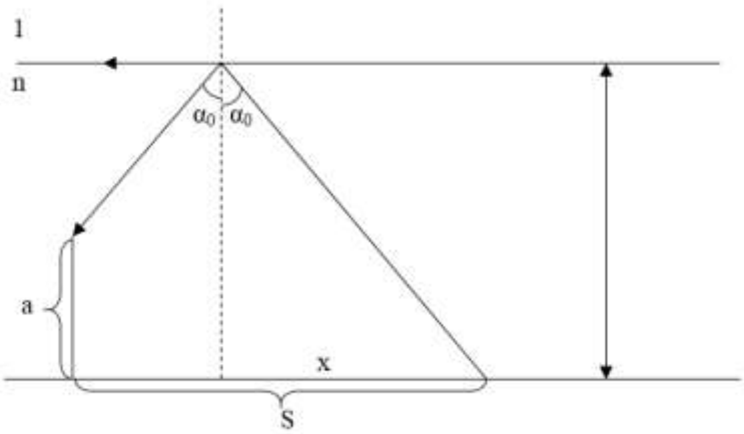
$n_1 \cdot \sin(\alpha) = n_2 \cdot \sin(\gamma)$ $\qquad n_1 \cdot \sin(\alpha_0) = n_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$n_1 > n_2$ $\qquad \sin(\alpha_0) = \frac{n_2}{n_1}$

$\gamma > \alpha$

Пример 6.3.

На какой глубине под водой находится водолаз, если он видит отраженными от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии *s*=15 м и больше? Рост водолаза *a*=1,5 м. Показатель преломления воды *n*=1,33.



Луч света, идущий от крайней точки горизонтального дна, которую видит водолаз падает на поверхность раздела воды и воздуха под углом полного внутреннего отражения:

$\sin(\alpha_0) = \frac{1}{n}$

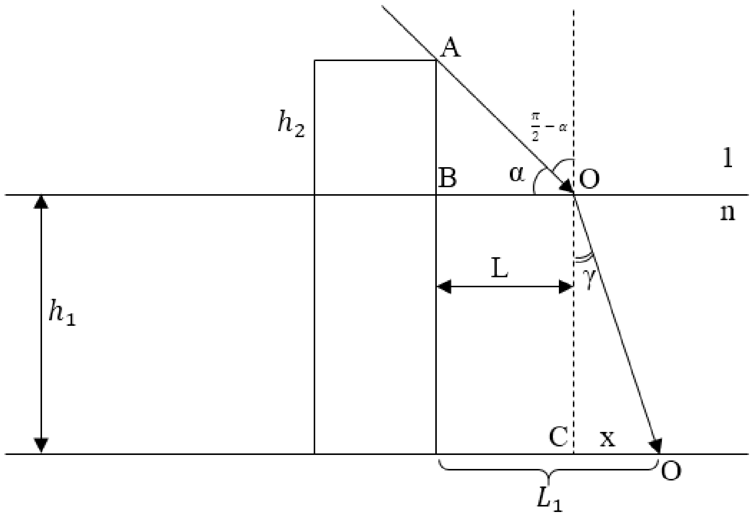
$tg(\alpha_0) = \frac{x}{H}$

$tg(\alpha_0) = \frac{S - x}{H - a}$

$$H = \frac{S\sqrt{n^2 - 1} + a}{2}$$

Пример 6.4.

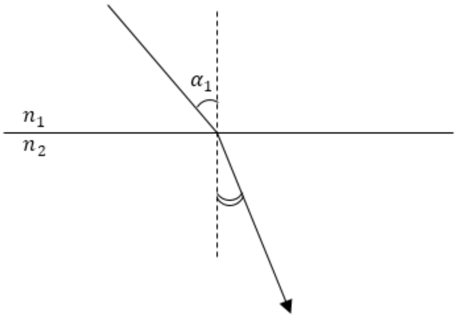
Столб вбит в дно реки и h_1=1 м столба возвышается над водой. Найти длину тени столба на поверхности и на дне реки, если высота Солнца над горизонтом $\alpha=30^0$, глубина реки h_2=2 м, показатель преломления воды равен n=1,33.



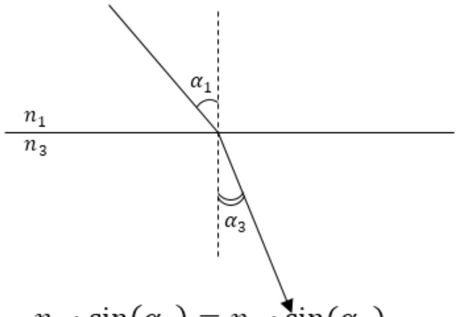
$$1 \cdot \sin(\beta) = n \cdot \sin(\gamma)$$
$$\sin(\gamma) = \frac{\sin(\beta)}{n}$$
$$tg(\alpha) = \frac{h_1}{L}$$
$$L = \frac{h}{tg(\alpha)}$$
$$L_1 = L + x$$
$$tg(\gamma) = \frac{x}{h_2}$$
$$x = tg(\gamma) \cdot h_2$$
$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{h}{tg(\alpha)} + tg(\gamma) \cdot h_2 \\ \sin(\gamma) = \dfrac{\sin(\beta)}{n} \end{cases}$$

Пример 6.5.

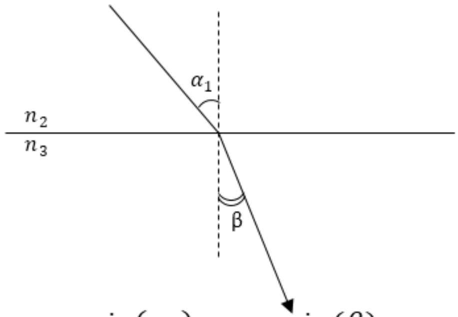
При переходе луча из первой среды во вторую угол падения θ_1 равен 60^0, а угол преломления θ_2 равен 45^0. При переходе луча из первой среды в третью угол падения θ_1 равен 60^0, а угол преломления θ_3 равен 30^0. Найти угол преломления β при переходе луча из второй среды в третью, если при этом угол падения θ_1 равен 60^0.



$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$



$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_3 \cdot \sin(\alpha_3)$$



$$n_1 \cdot \sin(\alpha_1) = n_3 \cdot \sin(\beta)$$

$$n_2 \cdot \sin(\alpha_2) = n_3 \cdot \sin(\alpha_3)$$

$$n_2 \cdot \sin(\alpha_1) = n_3 \cdot \sin(\beta)$$

$$\frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} = \frac{\sin(\alpha_3)}{\sin(\beta)}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_3)}{\sin(\alpha_2)}$$

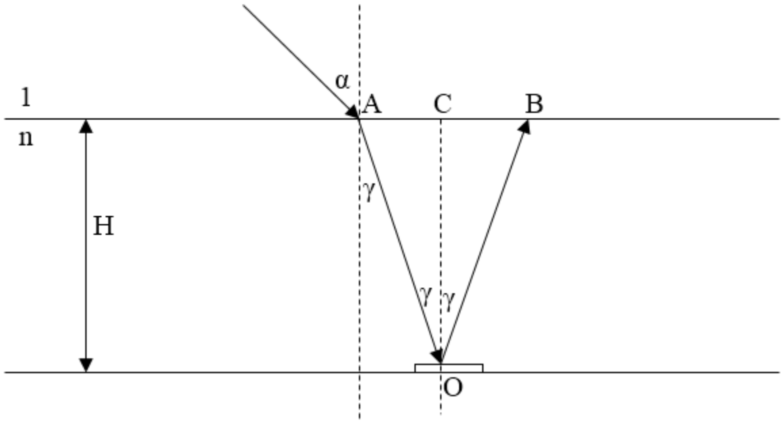
$$\sin(\beta) = \frac{\sin(60^\circ) \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(45^\circ)}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\beta = \arcsin(\sqrt{\frac{3}{8}})$$

Пример 6.6.

На горизонтальном дне водоёма глубиной H лежит плоское зеркало. На каком расстоянии L от места вхождения луча в воду он снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Угол падения луча на воду равен α, показатель преломления воды n.



AB = L

1).$1 \cdot \sin(\alpha) = n \cdot \sin(\gamma)$

$\sin(\gamma) = \dfrac{\sin(\alpha)}{n}$

2).$\Delta AOC \;\Rightarrow \angle ACO = 90^{\circ}$

$tg(\gamma) = \dfrac{AC}{H}$

$AC = 2 \cdot tg(\gamma) \cdot H$

3).

$\Delta AOC = \Delta OCB$

$AC = CB$

$CB = tg(\gamma) \cdot h$

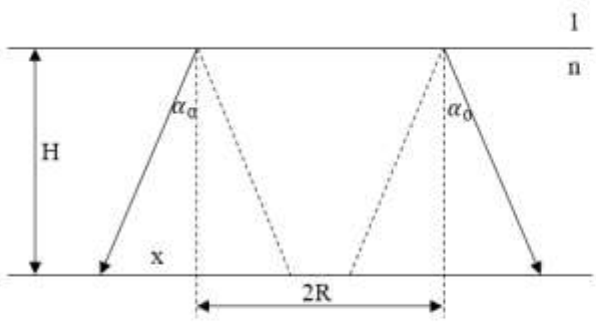
4).

$AB = 2 \cdot tg(\gamma) \cdot H$

$$\begin{cases} L = 2 \cdot H \cdot tg(\gamma) \\ \sin(\gamma) = \dfrac{\sin(\alpha)}{n} \end{cases}$$

Пример 6.7.

На поверхности водоема глубиной H плавает непрозрачный диск радиуса R. Определить радиус полутени от диска на дне водоема при освещении воды рассеянным светом.



Если луч света падает из воздуха на границу раздела с водой под углом 90°, то преломится он поду углом полного внутреннего отражения и условие полутени будет (см. рисунок):

$R' = R + x$

$\sin(\alpha_0) = \frac{n_2}{n_1}$

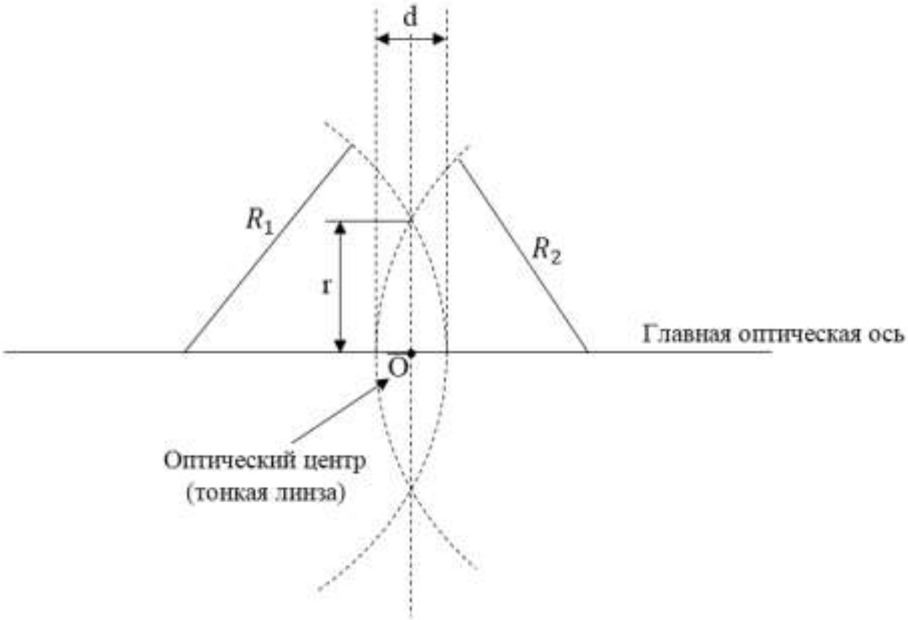
$$\begin{cases} \sin(\alpha_0) = \frac{1}{n} \\ tg(\alpha_0) = \frac{x}{H} \\ R' = R + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = H \cdot tg(\alpha_0) \\ R' = R + H \cdot tg(\alpha_0) \end{cases}$$

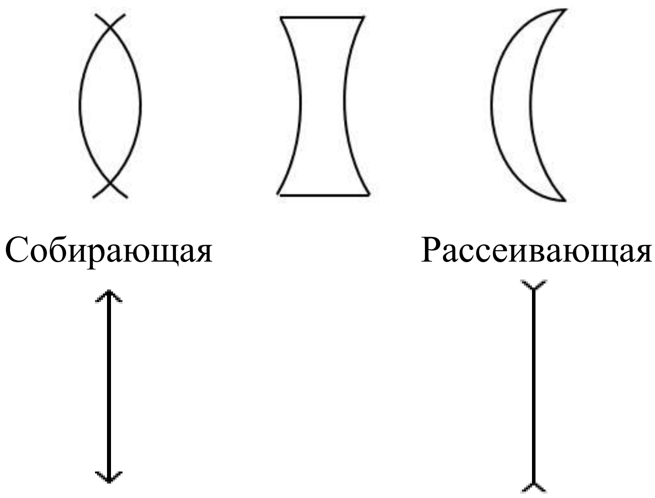
$$\begin{cases} \sin(\alpha_0) = \frac{1}{n} \\ R' = R + H \cdot tg(\alpha_0) \end{cases}$$

6.2. ЛИНЗЫ

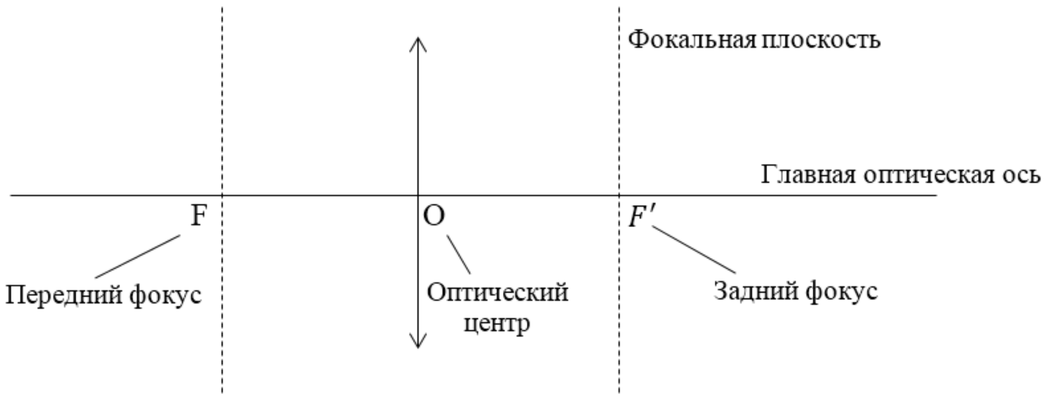
6.2.1. Основные положения



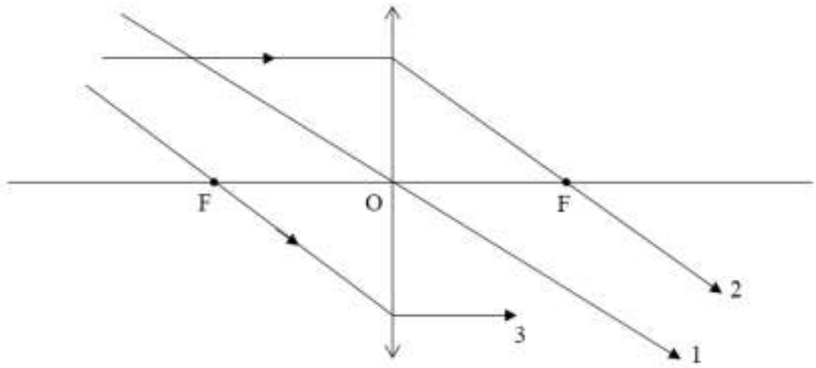
6.2.2. Тонкая линза $d \ll r$



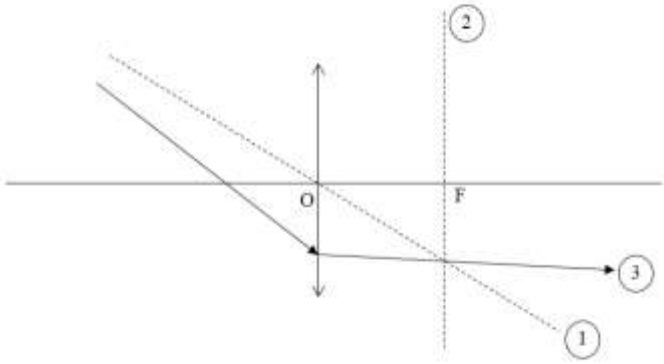
6.2.3. Ход лучей в собирающей линзе



1. Луч идущий через оптический центр не меняет своего направления.
2. Луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси, по выходе из линзы проходит через задний фокус.
3. Луч, проходящий через передний фокус, по выходе из линзы идет параллельно главной оптической оси.

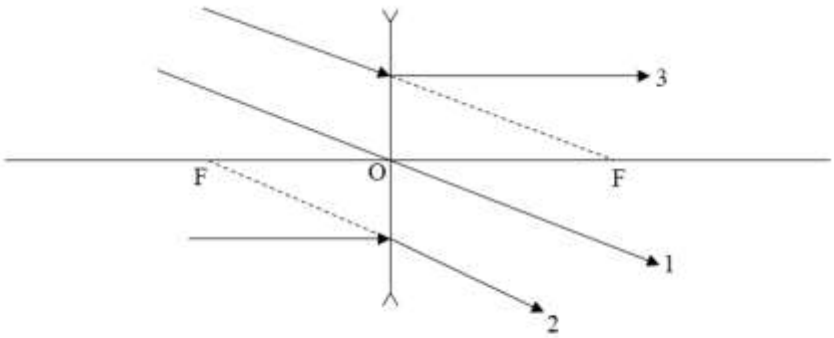


6.2.4. Произвольный луч



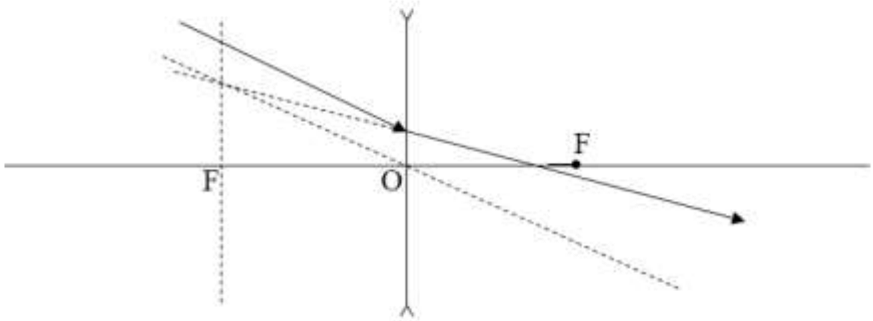
Строим луч, параллельный падающему, проходящий через оптический центр линзы, строим заднюю фокальную плоскость. Строим дальнейший ход произвольного луча через точку пересечения дополнительного луча и задней фокальной плоскости.

6.2.5. Ход лучей в рассеивающей линзе



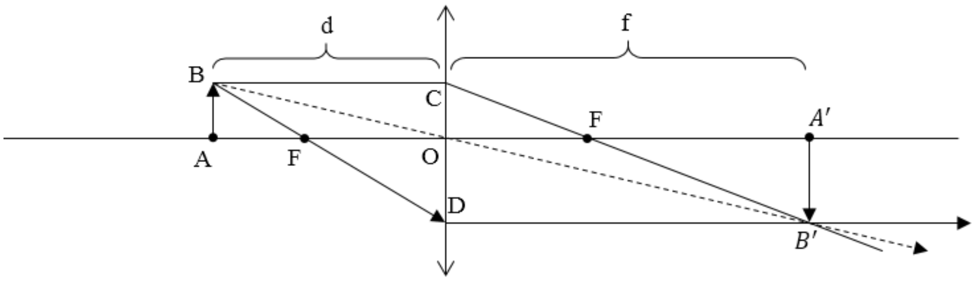
1. Луч идущий через оптический центр не меняет своего направления.
2. Луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси, по выходе из линзы идет так, что его продолжение проходит через задний фокус (который у рассеивающей линзы спереди).
3. Луч, продолжение которого проходит через передний фокус (который у рассеивающей линзы сзади), по выходе из линзы идет параллельно главной оптической оси.

6.2.6. Произвольный луч в рассеивающей линзе



Строим луч, параллельный падающему, проходящий через оптический центр линзы, строим заднюю фокальную плоскость (задний фокус у рассеивающей линзы спереди). Строим дальнейший ход произвольного луча через точку пересечения дополнительного луча и задней фокальной плоскости (продолжение луча проходит через найденную нами точку).

6.2.7. Формулы линзы



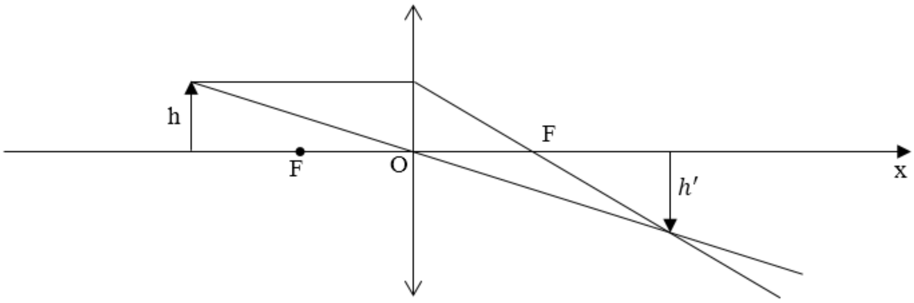
$AB = h, A'B' = h'$.

Поперечное линейное увеличение.

$$\Gamma = \frac{h'}{h}$$
$$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O$$
$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{d}$$
$$\Delta ABF \sim \Delta DOF$$
$$\frac{h'}{h} = \frac{F}{d-F}$$
$$\Delta OCF' \sim \Delta A'B'F'$$
$$\frac{h'}{h} = \frac{f-F}{F}$$
$$\frac{f}{d} = \frac{f-F}{F}$$
$$\frac{f}{d} = \frac{f}{F} - 1$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

6.2.8. Формула линзы с учетом правила знака



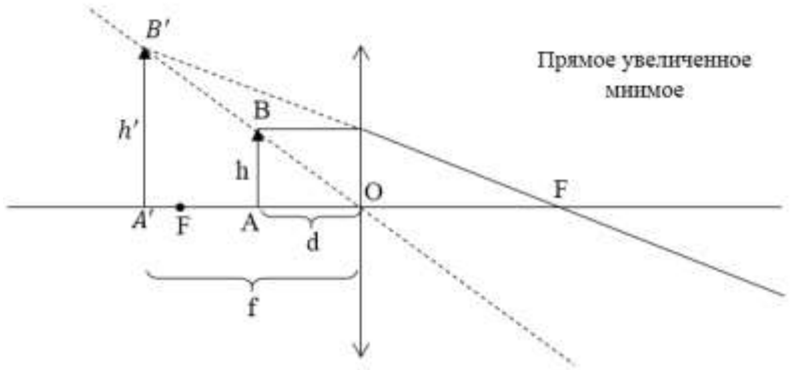
$$\frac{1}{F_x} = \frac{1}{f_x} - \frac{1}{d_x}$$

Вводим систему координат: начало координат совпадает с оптическим центром, ось X направлена вдоль главной оптической оси в сторону от предмета. F_x – координата заднего фокуса, f_x – координата изображения, d_x – координата предмета.

Пример.
I для собирающей линзы; II. для рассевающей линзы.
- построить изображение;
- написать формулу Линзы;
- ответить на вопросы: изображение прямое (перевернутое), мнимое (действительное), увеличенное (уменьшенное).

Для собирающей и рассеивающей линз рассмотреть случаи:

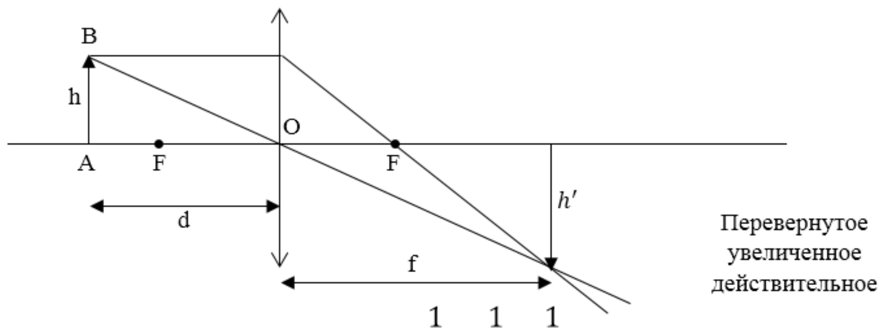
а) $0 < d \leq F$
б) $F < d \leq 2F$
в) $d > 2F$
I а)



$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} - \left(-\frac{1}{d}\right)$$

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

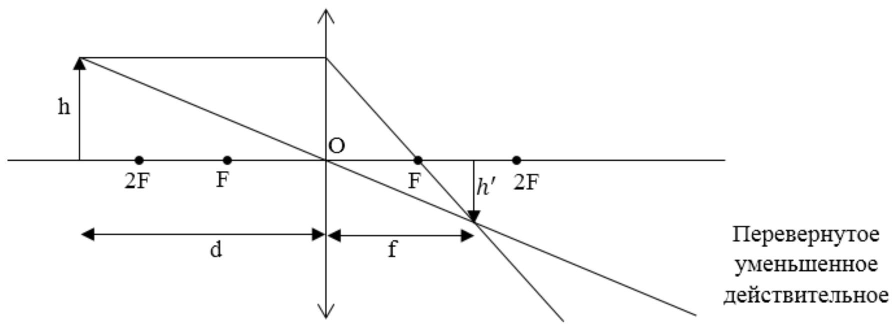
I б)



$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

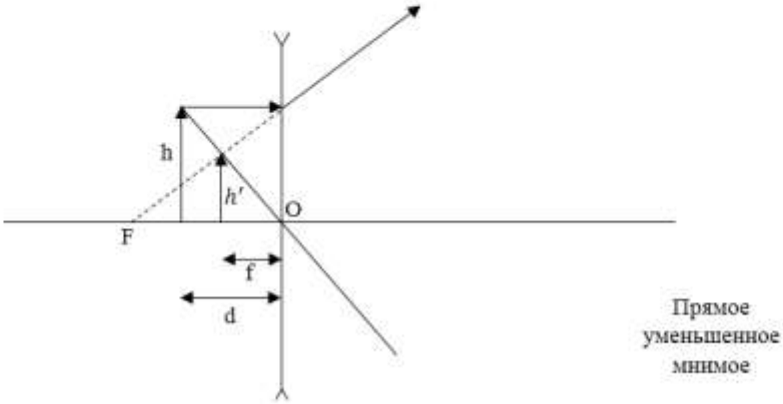
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

I в)



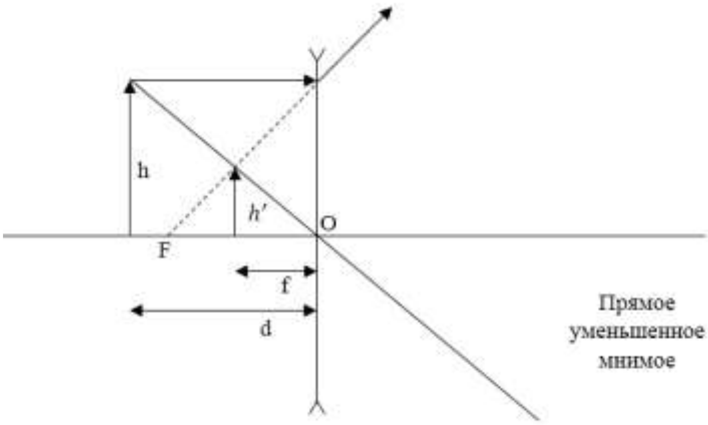
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

II а).



$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

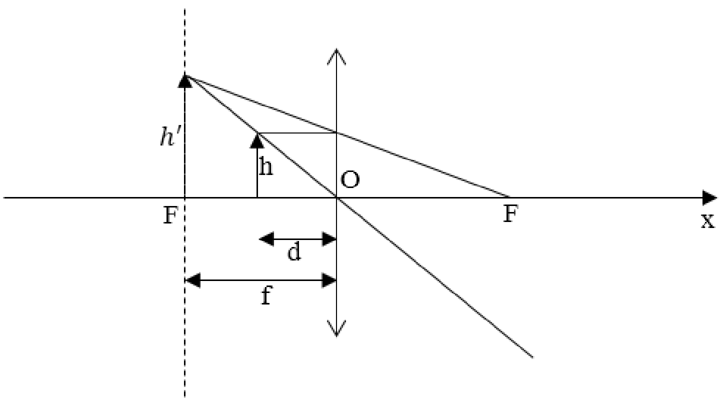
II б)



$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

Пример 6.8.

Мнимое изображение предмета находится в фокальной плоскости собирающей линзы с фокусным расстоянием F=1 м. На каком расстоянии d от линзы находится предмет?



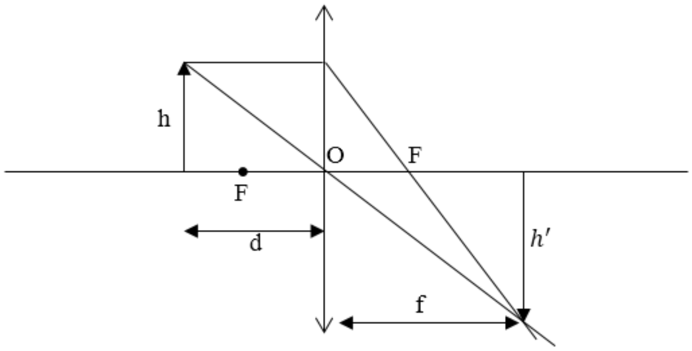
$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{F} + \frac{1}{d}$$
$$\frac{1}{d} = \frac{2}{F}$$

$$d = \frac{F}{2}$$

Пример 6.9.

Расстояние от предмета до линзы d=10 м, от линзы до действительного изображения f=2,5 м. Определить фокусное расстояние F линзы.

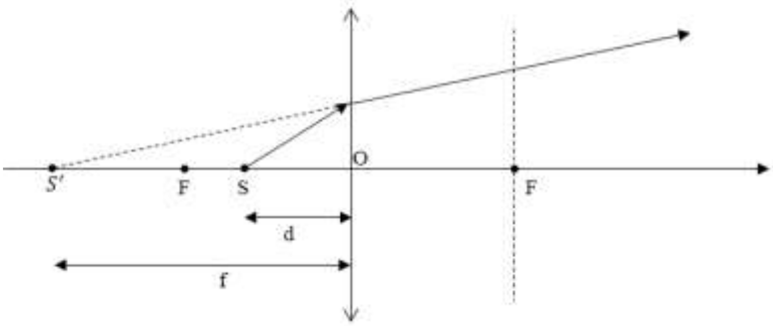


$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F} + \frac{1}{d}$$

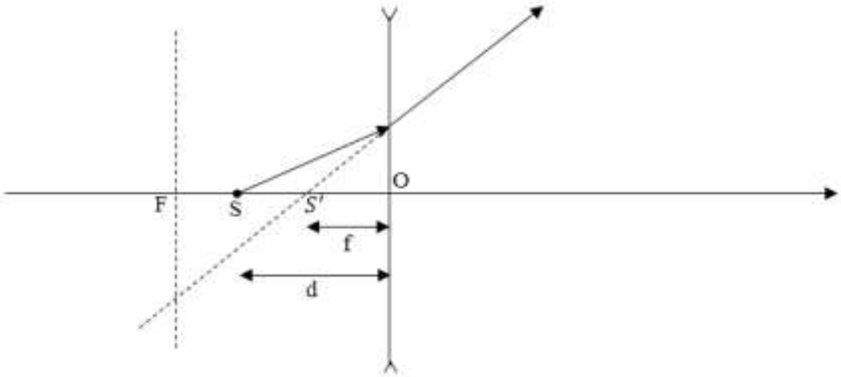
$$F = \frac{f \cdot d}{f + d}$$

Пример 6.10.

Построить изображение и написать формулу.



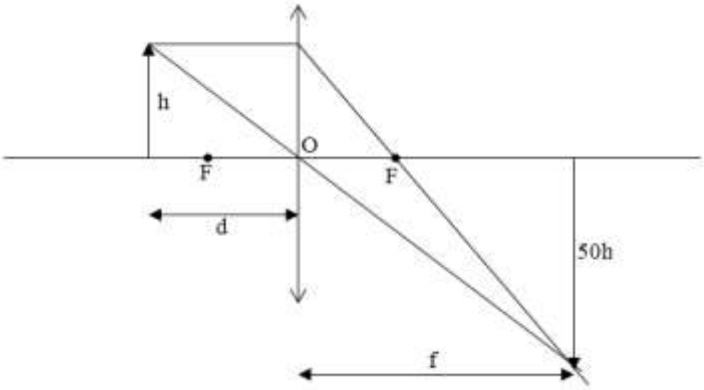
$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$



$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$

Пример 6.11.

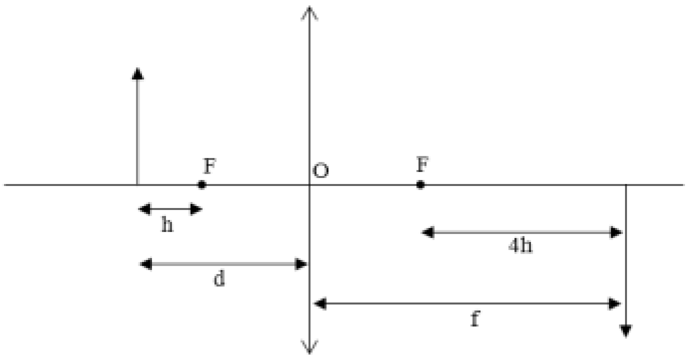
На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на экране было k=50 раз больше предмета на диапозитиве? Фокусное расстояние объектива F=0,1 м.



$$\frac{h'}{h} = 50$$
$$h' = 50h$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$
$$\frac{h'}{h} = \frac{f}{d}$$
$$\frac{50h}{h} = \frac{f}{d}$$
$$d = \frac{f}{50}$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{50}{f}$$
$$F = \frac{f}{51}$$
$$f = 51F$$

Пример 6.12.

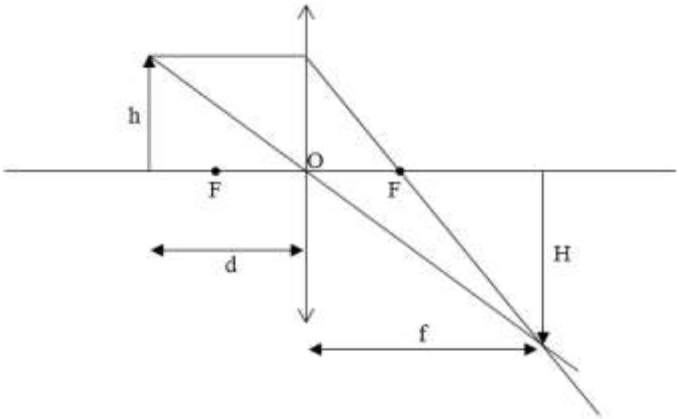
Предмет находится на расстоянии h от переднего фокуса собирающей линзы, а экран, на котором получается чёткое изображение предмета, расположен за задним фокусом линзы на расстоянии 4h от него. Найти фокусное расстояние линзы.



$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$
$$d = F + h$$
$$f = F + 4h$$
$$\frac{1}{F} = \frac{f + d}{fd}$$
$$F = \frac{(F + 4h)(F + h)}{F + h + F + 4h} = \frac{F^2 + Fh + 4Fh + 4h^2}{2F + 5h}$$
$$F = \frac{F^2 + 5Fh + 4h^2}{2F + 5h}$$
$$\frac{F^2 + 5Fh + 4h^2 - 2F^2 - 5Fh}{2F + 5h} = 0$$
$$\frac{4h^2 - F^2}{2F + 5h} = 0$$
$$\begin{cases} (2h - F)(2h + F) = 0 \\ F \neq \frac{5}{2}h \end{cases}$$
$$F = 2h \text{ или } F = -2h$$

Пример 6.13.

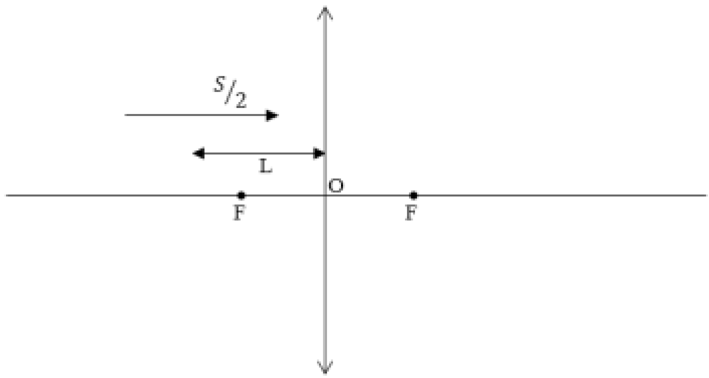
Освещенная щель высотой h=5 см проектируется с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F=10 см на экран, отстоящий от линзы на f=12 см. Найти размер H изображения щели на экране.

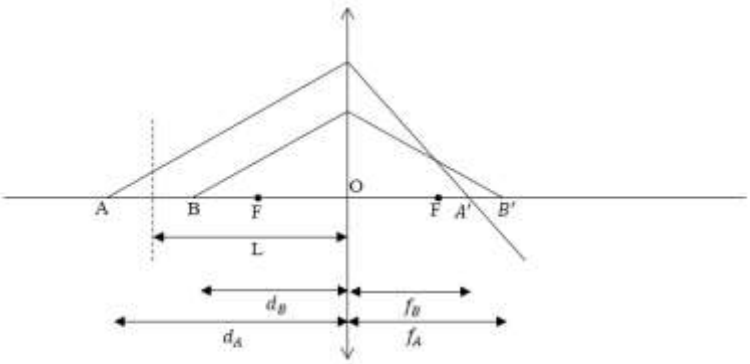


$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$$
$$\frac{H}{h} = \frac{f}{d}$$
$$d = \frac{hf}{H}$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{H}{hf} = \frac{h+H}{hf}$$
$$H = \frac{hf}{F} - h$$

Пример 6.14.

Предмет в виде отрезка длиной S расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка находится на расстоянии L от линзы, и линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определить продольное увеличение.





$$G = \frac{B'A'}{AB};$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_B} + \frac{1}{d_B};$$
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{d_A};$$
$$d_B = L - \frac{S}{2};$$
$$d_A = L + \frac{S}{2};$$

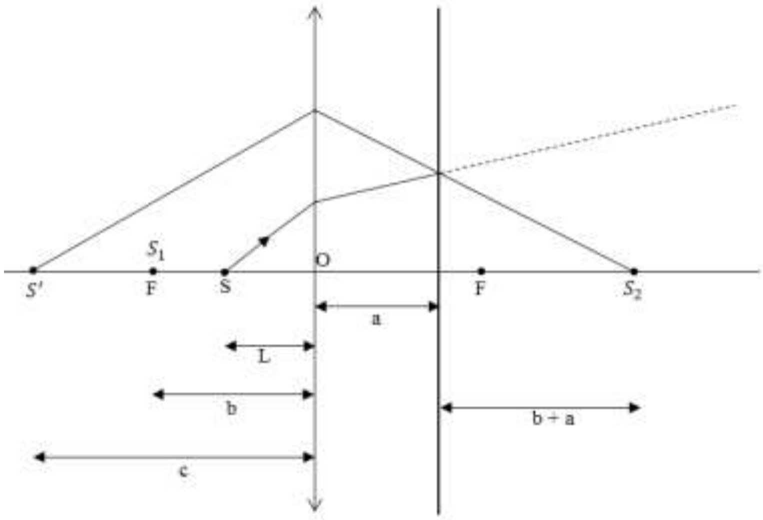
$AB = S$;
$B'A' = f_B - f_A$;

$$G = \frac{F}{S}\left(\frac{2L - S}{2L - S - 2F} - \frac{2L + S}{2L + S - 2F}\right).$$

6.3. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

6.3.1. Основные положения

Посторoим ход луча от источника в точке S в данной оптической системе:



На чертехже видно, что можно говорить о трех разных изображениях в каждом предмете оптической системы.

1) Изображение в линзе первый раз S_1:

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{b} + \frac{1}{L}$$

2) Изображение в плоском зеркале S_1:

$$b + a$$

3) Изображение в линзе второй раз S’:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{b + 2a} + \frac{1}{c}$$

6.3.2. Построение изображения в оптической системе

1. Строим изображение в первом предмете оптической системы.
2. Строим изображение изображения в следующем предмете и т.д.

ОГЛАВЛЕНИЕ